



Analyse de la stabilité des réseaux d'oscillateurs non linéaires, applications aux populations neuronales

Laurie Contevelle

► To cite this version:

Laurie Contevelle. Analyse de la stabilité des réseaux d'oscillateurs non linéaires, applications aux populations neuronales. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2013. Français. NNT : 2013PA112236 . tel-00904403

HAL Id: tel-00904403

<https://theses.hal.science/tel-00904403>

Submitted on 14 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITE PARIS-SUD**

Spécialité : Automatique

Ecole doctorale : STITS

Présentée le 17 octobre 2013

par

Laurie CONTEVILLE

Sujet de la thèse :

**Analyse de la stabilité des réseaux d'oscillateurs non linéaires,
applications aux populations neuronales.**

Directeur de thèse : Mme. Elena PANTELEY CNRS - L2S

Composition du jury

Président du jury	: Mr.	Jean-Pierre RICHARD	Ecole Centrale de Lille
Rapporteurs	: Mme.	Béatrice LAROCHE	INRA
	Mr.	Luca ZACCARIAN	CNRS - LAAS
Examineurs	: Mme.	Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE	CNRS - L2S
	Mme.	Nathalie CORSON	Université du Havre
	Mr.	Alexandre RENAUX	Université Paris-Sud

Laboratoire des Signaux et Systèmes
Université Paris-Sud / CNRS / UMR 8506 / Supélec
3, rue Joliot-Curie, 91192 Gif-Sur-Yvette, France

Remerciements

Je remercie ma directrice Elena Panteley, pour m'avoir encadrée tout au long de ma thèse. Je remercie Béatrice Laroche et Luca Zaccarian d'avoir accepté d'être rapporteurs ainsi que les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon sujet de thèse lors de la session de questions.

Je tiens à remercier du fond du cœur Alexandre Renaux et Frédéric Pascal qui m'ont donné force et confiance. Merci à Fred pour ses conseils que je ne comprends jamais très bien mais qui m'ont retenue sur le plateau de Saclay jusqu'à la fin. Merci à Alex avec qui j'ai été plus que ravie d'enseigner, pour son extrême patience, ses talents pédagogiques et sa grande capacité d'écoute.

Merci à mon p'tit Jean-Phi d'être toujours si content de faire équipe avec moi à la belote. Merci Pierrot pour ta cuisine, tes bons gâteaux, tes bon gros poulets, tes trucs avec du lards ou du bœuf ou du lard et du bœuf, des patates, du fromage...plein de fromage. Merci pour ta gentillesse et ta serviabilité. Merci à tous les joueurs de belote, merci à tonton Sylvain parce qu'il est gentil et qu'il râle mais jamais après moi. Merci à Alessio et Fernando les rois du barbek' et pas que. Merci à Alex pour toutes les soirées pleines de rebondissements, ses talents de mime (je pense que Mike Brant aurait été ravi de voir ton imitation au clair de Lune...hein Pierre?), les pizzas, les côtes de bœuf et les tripes à 10h du matin.

Je remercie également le docteur Kowal pour ses précieux conseils et bien évidemment je remercie mon frère et mes chers parents qui m'ont toujours soutenue.

Résumé

Il est bien connu que la synchronisation de l'activité oscillatoire dans les réseaux de neurones joue un rôle important dans le fonctionnement du cerveau et pour le traitement des informations données pas les neurones. Cette thèse porte sur l'analyse de l'activité de synchronisation en utilisant des outils et des méthodes issues de la théorie du contrôle et de la théorie de la stabilité. En particulier, deux modèles ont été étudiés pour décrire l'activité oscillatoire des réseaux de neurones : le modèle de Kuramoto et le modèle de Hindmarsh-Rose. Une partie de ce manuscrit est consacrée à l'étude du modèle de Kuramoto, qui est un des systèmes les plus simples utilisé pour modéliser un réseau de neurones, avec une connexion complète (*all-to-all*). Il s'agit d'un modèle classique qui est utilisé comme une version simplifiée d'un réseau de neurones. Nous construisons un système linéaire qui conserve les informations sur les fréquences naturelles et sur les gains d'interconnexion du modèle original de Kuramoto. Les propriétés de stabilité de ce modèle sont ensuite analysées et nous montrons que les solutions de ce nouveau système linéaire convergent vers un cycle limite périodique et stable. Finalement, nous montrons que contraint au cycle limite, les dynamiques du systèmes linéaires coïncident avec le modèle de Kuramoto. Dans une seconde partie, nous avons considéré un modèle de réseau de neurones plus proche de la réalité d'un point de vue biologique, mais qui est plus complexe que le modèle de Kuramoto. Plus précisément, nous avons utilisé le modèle de Hindmarsh-Rose pour décrire la dynamique de chaque neurone que nous avons interconnecté par un couplage diffusif (c'est-à-dire linéaire). A partir des propriétés de semi-passivité du modèle de Hindmarsh-Rose, nous avons analysé les propriétés de stabilité d'un réseau hétérogène de Hindmarsh-Rose. Nous avons également montré que ce réseau est pratiquement synchronisé pour une valeur suffisamment grande du gain d'interconnexion. D'autre part, nous avons caractérisé le comportement limite des neurones synchronisés et avons établi une approximation de ce comportement par une moyenne des dynamiques de tous les neurones.

Mots clés : synchronisation, stabilité asymptotique de systèmes linéaires et de systèmes non-linéaires, stabilité pratique de réseaux non-linéaires, semi-passivité, réduction de modèle, modèle de Kuramoto, couplage diffusif, couplage complet (*all-to-all*), cycle limite, comportement neuronal oscillatoire, modèle de Hindmarsh-Rose.

Abstract

It is widely recognized that rhythmic oscillatory activity in networks of neurons plays an important role in the brain functioning and a key role in processing neural information. This thesis is devoted to the analysis of this synchronized activity by using tools and methods issued from automatic control and stability theory. Two models are used to describe oscillatory activity of neural networks : Kuramoto model and network of Hindmarsh-Rose neurons. First, we consider Kuramoto model with complete (all-to-all) coupling, which is one of the simplest systems used to model neural network. For this model we construct an auxiliary linear system that preserves information on the natural frequencies and interconnection gains of the original Kuramoto model. Next, stability properties of this model are analyzed and we show that the solutions of the new linear system converge to a stable periodic limit cycle. Finally, we show that constrained to the limit cycle, dynamics of the linear system coincide with the original Kuramoto model. Second, a model for the network (population) with a better behavior, with respect to the Kuramoto model, from a biological point of view but more complex is considered. Particularly, we consider a network of diffusively coupled neurons where we use a Hindmarsh-Rose model to describe the dynamics of each individual neuron. Based on semi-passivity of individual Hindmarsh-Rose neurons, we analyse stability properties of a heterogeneous network of such neurons and show that network is practically synchronized for sufficient large values of interconnection gains. Moreover, we characterize the limiting synchronized behavior by using an averaging of all neuron dynamics.

Keywords : synchronization, asymptotic stability of linear and non-linear systems, practical stability network of non-linear units, semi-passivity, model reduction, Kuramoto model, diffusive and all-to-all coupling, limit cycle, neural oscillatory behavior, Hindmarsh-Rose neural model.

Liste des abréviations

AS	Asymptotiquement Stable	<i>Asymptotically Stable</i>
PAS	Pratiquement Asymptotiquement Stable	<i>Practically Asymptotically Stable</i>
uPAS	uniformément Pratiquement Asymptotiquement Stable	<i>Practically uniformly Asymptotically Stable</i>
UGPAS	Uniformément Globalement Pratiquement Asymptotiquement Stable	<i>Practically Uniformly Globally Asymptotically Stable</i>

Notations

Classes, ensembles et ensembles de fonctions

- \mathbb{R} indique l'ensemble des réels.
- \mathbb{R}_+ indique l'ensemble des réels positifs ou nuls.
- \mathbb{C} indique l'ensemble des complexes.
- \mathbb{N} indique l'ensemble des entiers naturels.
- \mathbb{Z} indique l'ensemble des entiers relatifs.
- \mathbb{D} indique un ensemble quelconque, ou à définir.
- Soit $C(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, l'ensemble des applications continues de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q et $C^i(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble des applications continues dont les dérivées partielles d'ordre i sont définies et continues. L'ensemble des fonctions pour lesquelles ces dérivées sont continues pour tout $i \in \mathbb{N}$ est noté $C^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, la fonction $\gamma : [0, a[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite de classe \mathcal{K} si elle est continue, égale à zéro en zéro et strictement croissante, on dit qu'elle est de classe \mathcal{K}_∞ si de plus, $a = \infty$ et $\gamma(s) \rightarrow \infty$ quand $s \rightarrow \infty$.

Vecteurs et matrices

- Les lettres en minuscule et en gras, indiquent un vecteur colonne.
- Les lettres en majuscule et en gras, indiquent une matrice.
- Une matrice \mathbf{B} de dimension N par M , dont les coefficients appartiennent à un corps \mathbb{D} , appartient à l'ensemble $\mathbb{D}^{N \times M}$, où \mathbb{D} peut être \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- b_{ij} où $(\mathbf{B}_{i,j})$ est l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{B} .
- \mathbf{B}^T , le symbole T indique l'opérateur transposé

- $\overline{\mathbf{B}}$, le symbole τ indique l'opérateur conjugué
- \mathbf{I}_N indique la matrice identité de taille $N \times N$
- $\mathbf{1}$ indique le vecteur colonne unitaire de taille appropriée
- $\mathbf{B}\mathbf{v}_{di} = \lambda_i \mathbf{v}_{di}$, \mathbf{v}_{di} est le $i^{\text{ème}}$ vecteur propre droit de la matrice \mathbf{B} correspondant à λ_i , la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de la matrice \mathbf{B}
- $\mathbf{v}_{gi}^T \mathbf{B} = \lambda_i \mathbf{v}_{gi}^T$, \mathbf{v}_{gi} est le $i^{\text{ème}}$ vecteur propre gauche de la matrice \mathbf{B} correspondant à λ_i , la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de la matrice \mathbf{B}
- Pour la matrice $\mathbf{A} = [a_{lk}] \in \mathbb{R}^{L \times K}$, $l \in 1, \dots, L$ et $k \in 1, \dots, K$, et pour la matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $N, M \in \mathbb{N}$, la notation $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{LN \times KM}$ désigne le produit de Kronecker de la matrice \mathbf{A} par la matrice \mathbf{B} et

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1K}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{L1}\mathbf{B} & \dots & a_{LK}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Normes

- $|\cdot|$ indique la valeur absolue pour un scalaire.
- $\|(\cdot)\|$ indique la norme euclidienne pour un vecteur, c'est-à-dire

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{a}, \text{ pour } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$$

$$\|\mathbf{b}\|^2 = \overline{\mathbf{b}}^T \mathbf{b}, \text{ pour } \mathbf{b} \in \mathbb{C}^N$$

- $\|(\cdot)\|_{\mathcal{A}}$ représente la distance à l'ensemble fermé \mathcal{A} telle que $|x|_{\mathcal{A}} = \inf_{z \in \mathcal{A}} |x - z|$

Propriété sur les fonctions

- Soit la fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est dite localement Lipschitz si pour tout ensemble compact \mathbb{D} dans \mathbb{R}^N , il existe une constante $k_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq k_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, pour tout $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in \mathbb{D}$.
Quand le contexte est suffisamment explicite, nous ne spécifierons pas les arguments de la fonction \mathbf{f}

Table des matières

Résumé	xiii
Résumé Anglais	xiii
Liste des abréviations	xiii
Notations	xiii
Liste des figures	xvii
Liste des tableaux	xxi
1 Introduction	1
2 Activité neuronale et modélisation mathématique : état de l'art	8
2.1 Le neurone du point de vue biologique	8
2.1.1 Le neurone	8
2.1.2 L'information à travers le neurone	9
2.1.3 Connexion entre neurones	12
2.1.4 Activité neuronale, synchronisation - désynchronisation	12
2.2 Modélisation mathématique d'un neurone	14
2.2.1 Modèle de Hodgkin-Huxley	15
2.2.2 Modèle de FitzHugh-Nagumo	16
2.2.3 Modèle de Hindmarsh-Rose	17
2.2.3.1 Modèle à deux équations	17
2.2.3.2 Modèle à trois équations	18
2.3 Connexion neuronale et modélisation de réseaux neuronaux	20
2.3.1 Modèles de connexions neuronales	20
2.3.2 Le neurone vu comme un oscillateur	22
2.3.3 Modèle de Kuramoto	23
2.3.3.1 Généralités	23
2.3.3.2 Synchronisation	24
2.3.3.3 Quelques résultats	25
3 Synchronisation de systèmes semi-passifs à couplage diffusif	29
3.1 Théorie des graphes pour les problèmes de synchronisation	29
3.2 Synchronisation des systèmes : définitions et outils	31
3.3 Synchronisation des systèmes semi-passifs	32

3.3.1	Systèmes passifs, semi-passifs et bornitude des solutions	32
3.3.2	Convergence de systèmes dynamiques	34
3.3.3	Synchronisation pour des systèmes semi-passifs et convergent	34
4	Du modèle de Kuramoto au modèle linéaire : projection asymptotique et propriétés de stabilité de ces deux systèmes	37
4.1	Une reformulation linéaire du modèle de Kuramoto et ses propriétés	37
4.2	Propriétés intrinsèques des systèmes linéaires définis par l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_{K\omega}$	41
4.3	Remarques sur l'analyse de la stabilité des systèmes à variables complexes	45
4.4	Analyse de la stabilité des systèmes linéaires définis par l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_{K\omega}$	46
4.5	Application du modèle linéaire dans le modèle de Kuramoto	53
4.6	Simulations	54
4.6.1	Modèle linéaire	55
4.6.2	Comportement synchronisé du modèle de Kuramoto	58
4.6.3	Comparaison entre le modèle linéaire et le modèle de Kuramoto	58
4.7	Conclusions	59
5	Synchronisation pratique de réseaux hétérogènes, applications au réseau neuronal de Hindmarsh-Rose	67
5.1	Contexte général	67
5.2	Reformulation du problème et notions connexes	69
5.2.1	Description du modèle	69
5.2.2	Structure du réseau et interconnexion entre les nœuds	71
5.2.3	Dynamiques globales du réseau	71
5.2.4	Formulation du problème	72
5.3	Solutions U-bornées des réseaux de systèmes non linéaires	75
5.4	Changement de coordonnées du réseau en une fonction de graphe d'interconnexion	76
5.4.1	Décomposition de la matrice laplacienne	76
5.4.2	Changement de coordonnées	77
5.5	Écriture des dynamiques du réseau avec les nouvelles coordonnées	78
5.5.1	Dynamiques de l'élément moyen	78
5.5.2	Dynamiques des erreurs de synchronisation	79
5.6	Analyse de la stabilité de réseaux de systèmes à couplage diffusif	81
5.6.1	Analyse de la stabilité de l'ensemble synchronisé S_y et S_x	81
5.6.1.1	Deux lemmes pour la preuve du théorème 6	84
5.6.1.2	Preuve du théorème 6	86
5.6.2	Stabilité pratique du comportement collectif du réseau	89
5.7	Réseau neuronal de Hindmarsh-Rose à couplage diffusif pratiquement synchronisé	91
5.7.1	Description du modèle	91
5.7.2	Réseau neuronaux de Hindmarsh-Rose pratiquement synchronisé	92
5.8	Résultats de simulations du modèle de Hindmarsh-Rose pour un réseau à connexion diffusive	94
5.8.1	Trois comportements de l'activité neuronale représentés par le modèle de Hindmarsh-Rose	94
5.8.2	Réseau de huit neurones de Hindmarsh-Rose	94

5.8.3	Approximation des dynamiques de synchronisation du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose par le neurone moyen de Hindmarsh-Rose	101
6	Conclusions et perspectives	109
	Bibliographie	113

Table des figures

2.1	Schéma d'une synapse chimique et d'une synapse électrique.	9
2.2	Canaux ioniques. Des canaux perméables aux ions Na_+ peuvent être ouverts mais sans laisser passer d'ions. Les canaux dont l'ouverture et la fermeture sont commandées par un signal électrique sont appelés canaux voltage-dépendants.	9
2.3	Potentiel membranaire à l'état de repos.	10
2.4	Potentiel d'action et mouvements ioniques.	11
2.5	Différents potentiels d'action	12
2.6	Ganglions de la base.	13
2.7	Schéma électrique de la membrane.	16
2.8	Réponse du modèle à trois équation de Hindmarsh-Rose, pour les valeurs de paramètres suivantes : $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, r = 0.001, s = 4$ et pour $I = 2$. Les trains d'impulsions ont le même nombre d'impulsions.	19
2.9	Réponse du modèle à trois équation de Hindmarsh-Rose, pour les valeurs de paramètres suivantes : $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, r = 0.001, s = 4$ et pour $I = 4$	20
4.1	Comportement asymptotique du modèle linéaire (4.6) pour un gain $K = 20$ et pour les conditions initiales : $\mathbf{x}_o = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$. La courbe (b) est un zoom de la courbe (a).	58
4.2	Comportement asymptotique du modèle linéaire (4.6) pour un gain $K = 20$ et pour les conditions initiales : $\mathbf{x}_o = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$. La courbe (b) est un zoom de la courbe (a).	59
4.3	Comportement asymptotique du modèle linéaire (4.6) pour un gain $K = 50$ et pour les conditions initiales : $\mathbf{x}_o = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$. La courbe (b) est un zoom de la courbe (a).	60
4.4	Comportement asymptotique du modèle linéaire (4.6) pour un gain $K = 50$ et pour les conditions initiales : $\mathbf{x}_o = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$. La courbe (b) est un zoom de la courbe (a).	61
4.5	Différences de phase $\psi_j - \psi_1, j \in \{2, 3, 4\}$ pour le système (4.6), avec $K = 20$ et $\mathbf{x}_o = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$ (courbes (a)), $K = 20$ et $\mathbf{x}_o = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$ (courbes (b)), avec $K = 50$ et $\mathbf{x}_o = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$ (courbes (c)), $K = 50$ et $\mathbf{x}_o = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$ (courbes (d)).	62
4.6	Comportement du paramètre d'ordre pondéré z pour $K = 50$ et pour $\mathbf{x}_o = [1 - i0.6, 2 + i0.7, 0.4 - i0.1, 0.3 - i1.6]^T$ (courbe bleue), $\mathbf{x}_o = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$ (courbe verte), $\mathbf{x}_o = [1 - i3, 5 + i3, 2.5 - i1.8, 3 - i5]^T$ (courbe rouge) et pour $\mathbf{x}_o = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$ (courbe violette).	63
4.7	Comportement asymptotique de phase du modèle de Kuramoto (4.1), suivant la valeur du gain K , généré pour $N = 4$ oscillateurs ($j = \{1, \dots, 3, 4\}$), $\boldsymbol{\omega} = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$, et $\boldsymbol{\theta}_o = [5, 1.4, 0.7, 4.1]^T$. Les courbes vertes sont tracées pour $K = 5$, les courbes bleues pour $K = 10$ et les courbes rouges sont tracées pour $K = 20$	63
4.8	Comportement asymptotique de phase synchronisé du modèle de Kuramoto (4.1) suivant l'initialisation de $\boldsymbol{\theta}_o$ pour $K = 20, \boldsymbol{\omega} = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$ et $j = \{1, 2, 3, 4\}$. Les courbes bleues sont tracées pour $\boldsymbol{\theta}_o = [5, 1.4, 0.7, 4.1]^T$ et les courbes rouges pour $\boldsymbol{\theta}_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$	64

4.9	Différences de phases $\theta_j - \theta_1$, $j = \{2, 3, 4\}$ du modèle de Kuramoto (4.1) suivant la valeur du gain K dans le cas où les $N = 4$ oscillateurs sont synchronisés. Les fréquences naturelles sont : $\omega = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$ et l'initialisation des phases est : $\theta_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$. Les courbes bleues sont tracées pour $K = 20$ et les courbes rouges pour $K = 50$	64
4.10	Comportement de phase ψ_j , du modèle linéaire (4.6)(courbes rouges) et du modèle de Kuramoto θ_j (4.1) (courbes bleues) pour un gain d'interconnexion suffisamment grand pour assurer la synchronisation. $K = 20$ (courbes (a)), $K = 50$ (courbes (b)). Dans chaque cas, $j = \{1, 2, 3, 4\}$, les fréquences naturelles sont : $\omega = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$, l'initialisation des modèles est : $\theta_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$ (pour le modèle de Kuramoto) et $\mathbf{x}_0 = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$ (pour le modèle linéaire).	65
4.11	Différences de phases $\psi_j - \psi_1$ (en rouge) pour le système (4.6) et $\theta_j - \theta_1$ (en bleu) pour le système (4.1), $j = \{2, 3, 4\}$, avec $\omega = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$, $\mathbf{x}_0 = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$, $\theta_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$ et pour un gain d'interconnexion $K = 20$ (courbes (a)) et $K = 50$ (courbes (b)).	65
5.1	Trois comportements de l'activité neuronale obtenues avec le modèle de Hindmarsh-Rose. (a) Spikes, $(I, r) = (3, 0.00004)$, (b) Bursts, $(I, r) = (3, 0.001)$, (c) Repos $(I, r) = (3, 0.00007)$. . .	95
5.2	Graphe d'interconnexion des huit neurones du réseau.	96
5.3	Les huit dynamiques de chacun des neurones du réseau de Hindmarsh-Rose avec (I, r) correspondant au cas 1, tableau 5.1.	96
5.4	Les huit dynamiques de chacun des neurones du réseau de Hindmarsh-Rose avec (I, r) correspondant au cas 2, tableau 5.1.	98
5.5	Les huit dynamiques de chacun des neurones du réseau de Hindmarsh-Rose avec (I, r) correspondant au cas 3, tableau 5.1.	98
5.6	Comportement transitoire du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose avec (I, r) correspondant au cas 2 (tableau 5.1), pour $K = 50$. (a) $\mathbf{x}_{o(a)}$, (b) $\mathbf{x}_{o(b)}$	99
5.7	Les huit dynamiques de chacun des neurones du réseau de Hindmarsh-Rose avec (I, r) correspondant au cas 2, (tableau 5.1). (a) $K = 0$, (b) $K = 5$, (c) $K = 10$, (d) $K = 50$. (e), (f), (g) et (h), les zooms respectifs de (a), (b), (c) et (d).	99
5.8	Erreur $e(t)$ du réseau pour $K = [50, 100, 500, 1000]$ et pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) : (a) cas 1, (b) cas 2, (c) cas 3. Les courbes (d) et (g), (e) et (h), (f) et (i) les zooms respectifs des courbes (a), (b) et (c).	100
5.9	Erreur $e_j(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) : (a) cas 1, (b) cas 2, (c) cas 3. Les courbes (d), (e) et (f) les zooms respectifs des courbes (a), (b) et (c).	100
5.10	Erreur $e_j(t)$ et $x_1^1(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) : (a) cas 1, (b) cas 2, (c) cas 3. Les courbes (d), (e) et (f) les zooms respectifs des courbes (a), (b) et (c).	101
5.11	Dynamiques $x_j^1(t)$, $j \in \{1, \dots, 8\}$ du réseau pour $K = 1000$ et pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) : (a) cas 1, (b) cas 2, (c) cas 3.	101
5.12	Dynamiques $x_j^1(t)$, $j \in \{1, \dots, 8\}$ et du neurone moyen $x_s^1(t)$, pour $K = 1000$ et pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) : (a) cas 1, (b) cas 2, (c) cas 3, (d) cas 4.	103
5.13	Dynamiques $\mathbf{x}_1(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $\mathbf{x}_s(t)$, pour les valeurs (I, r) définies au (a) cas 1.	103
5.14	Dynamiques $\mathbf{x}_1(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $\mathbf{x}_s(t)$, pour les valeurs (I, r) définies au cas 2.	104
5.15	Dynamiques $\mathbf{x}_1(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $\mathbf{x}_s(t)$, pour les valeurs (I, r) définies au cas 3.	104

5.16	Dynamiques $\mathbf{x}_1(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $\mathbf{x}_s(t)$, pour les valeurs (I, r) définies au cas 4.	105
5.17	Dynamiques $[x_1^1(t) x_1^2(t)]^T$ du réseau $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $[x_s^1(t) x_s^2(t)]^T$ pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) cas 1.	105
5.18	Dynamiques $[x_1^1(t) x_1^2(t)]^T$ du réseau $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $[x_s^1(t) x_s^2(t)]^T$ pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) cas 2.	106
5.19	Dynamiques $[x_1^1(t) x_1^2(t)]^T$ du réseau $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $[x_s^1(t), x_s^2(t)]^T$ pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) cas 3.	106
5.20	Dynamiques $[x_1^1(t), x_1^2(t)]^T$ du réseau pour $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $[x_s^1(t), x_s^2(t)]^T$ pour les valeurs (I, r) définies au cas 4.	107

Liste des tableaux

2.1	Classifications de l'activité oscillatoire des neurones	13
4.1	Valeurs numériques des paramètres du système (4.5) pour $N = 4$ avec le gain d'interconnexion $K = 20$ et le vecteur des fréquences naturelles $\boldsymbol{\omega} = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T, \forall \mathbf{x}_0$	56
4.2	Valeurs numériques des paramètres du système (4.5) pour $N = 4$ avec le gain d'interconnexion $K = 50$ et le vecteur des fréquences naturelles $\boldsymbol{\omega} = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T, \forall \mathbf{x}_0$	57
5.1	Valeurs des paramètres I et r pour chacun des huit neurones.	97

Chapitre 1

Introduction

L'analyse du comportement de réseaux de neurones est un thème de recherche attractif qui attire l'attention des chercheurs venant de différentes communautés scientifiques comme les neurosciences [7, 10, 21, 22, 39, 55, 70, 82] et les neurosciences computationnelles [1, 22, 44, 61, 100, 106, 107], les systèmes dynamiques, l'informatique et plus récemment la théorie du contrôle [25, 26, 46, 54, 108, 119, 127]. Ce sujet de thèse à caractère pluridisciplinaire s'inscrit dans les thématiques des neurosciences et de la théorie du contrôle. Nous nous proposons d'étudier le comportement de réseaux neuronaux, notamment les phénomènes de synchronisation du point de vue de la théorie du contrôle et de la stabilité des systèmes non linéaires.

L'analyse du phénomène de synchronisation de l'activité neuronale est motivée par l'importance de ses effets responsables de trouble de l'humeur, perte de mémoire, ou encore de dysfonctionnements du mouvement tel que le tremblement. En effet, l'activité électrique d'un groupe de neurones est à l'origine entre autres du mouvement. Le tremblement, qui est un mouvement involontaire, est le résultat d'une synchronisation neuronale pathologique. Pour pallier ce dysfonctionnement de l'activité il existe deux solutions qui sont les suivantes : le traitement médicamenteux et la stimulation cérébrale profonde. La stimulation cérébrale profonde permet de détruire l'activité synchronisée pathologique d'une zone du cerveau. Cette méthode invasive consiste à stimuler la zone du cerveau concernée par des impulsions électriques via une électrode. Le signal appliqué est réglé empiriquement sur le patient. A ce jour, il n'existe pas d'explications communément acceptées quant au fonctionnement de la stimulation cérébrale profonde permettant de rétablir une activité neuronale normale. C'est pourquoi, il est crucial d'étudier et de modéliser le réseau neuronal. L'importance et la complexité du problème font de l'analyse des systèmes neuronaux un domaine de recherche très attractif qui implique des spécialistes de communautés différentes.

Du point de vue de la théorie du contrôle, nous pouvons considérer le réseau neuronal comme un cas particulier de réseaux et de systèmes non linéaires complexes interconnectés. Pour analyser ce problème nous utiliserons donc des outils théoriques issus de la théorie du contrôle et de l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires. Nous nous sommes inspirés des nombreux travaux portant sur l'étude des réseaux de neurones [1, 22, 24, 33, 34, 37, 49, 61, 68, 100, 112–115] et par les résultats sur l'analyse de la stabilité de réseaux non linéaires [2, 27, 69, 97, 99, 104, 108]. Nous nous intéresserons dans ce travail à la modélisation et à l'analyse du comportement de réseaux neuronaux, notamment à l'effet de la synchronisation d'un réseau de neurones interconnectés. Le phénomène de synchronisation est très étudié dans les différents domaines des sciences et de l'in-

génierie, comme par exemple en physique, en économie, en robotique pour l'étude des systèmes de puissance ou encore en neurosciences pour l'étude de l'activité neuronale [22, 44, 61, 82, 90, 118]. Concernant la modélisation de l'activité neuronale, nous pouvons aborder le problème de deux manières différentes. L'une d'entre elles consiste à utiliser des modèles mésoscopiques qui décrivent les dynamiques de l'activité de populations de neurones. La seconde manière de se placer est d'utiliser des modèles microscopiques qui décrivent les dynamiques de chaque neurone interconnecté et c'est ce type de modèle que nous utiliserons. Il existe deux approches pour la modélisation microscopique de l'activité neuronale. L'une de ces approches ayant un aspect plus physiologique utilise des modèles dédiés à la description des dynamiques neuronales, tels que les modèles de Hodgging-Huxley [60], FitzHugh-Nagumo [49] ou encore le modèle de réseau de Hindmarsh-Rose [56, 57]. L'autre approche utilise des modèles plus abstraits qui ne sont pas basés sur la modélisation de l'aspect physiologique. Ces modèles permettent d'analyser certaines caractéristiques de l'activité, comme le modèle de Kuramoto [77], ou encore le modèle intègre-et-tire [15, 20, 68, 78, 86].

Nous proposons dans ce travail une analyse des propriétés de synchronisation et de stabilité de deux types de réseaux neuronaux qui sont les suivants : le réseau de neurones de Hindmarsh-Rose [57] et le modèle de Kuramoto [77]. Le modèle de Kuramoto qui est probablement le modèle le plus simple est largement utilisé pour l'étude de phénomènes de synchronisation et en particulier pour l'étude des réseaux de neurones. Nous proposerons pour ce dernier un modèle linéaire ayant un comportement asymptotique et des propriétés similaires au modèle de Kuramoto. Quant au modèle de réseau de neurone de Hindmarsh-Rose, il est plus complexe mais il est néanmoins plus réaliste que le modèle de Kuramoto d'un point de vue physiologique. En effet, les signaux qu'il génère reproduisent avec plus d'exactitude le comportement de l'activité neuronale (que nous expliquons ci-après). Ces deux modèles seront étudiés du point de vue de la théorie du contrôle qui nous permettra de formuler les conditions suffisantes pour la synchronisation de ces réseaux.

De part le caractère pluridisciplinaire de ce sujet de thèse il est très difficile de dresser une liste complète de la littérature. L'analyse de la littérature proposée dans ce travail de thèse est motivée par les problèmes posés et les outils utilisés et est répartie dans les chapitres 2, 3 et 5.

Ce manuscrit de thèse est organisé de la façon suivante.

Au chapitre 2 nous proposons dans une première partie une description succincte mais didactique du fonctionnement neuronale du point de vue biologique. Nous tentons d'expliquer comment les neurones communiquent, quels sont les types de signaux générés dans le cas d'un fonctionnement normal et dans le cas pathologique. Un réseau de neurones est constitué de plusieurs neurones qui interagissent entre eux par voies synaptiques. Ces voies permettent les échanges chimiques ou électriques, responsables de la production de signaux électriques des neurones (la production et les types de signaux générés sont détaillés à la section 2.1.2). La manière dont les neurones communiquent est également appelée connexion. Il en existe deux types : la connexion synaptique et la connexion diffusive qui assurent respectivement un échange chimique, un échange électrique (nous définissons ces termes et leur fonctionnement physiologique à la section 2.1.3). On se propose d'étudier dans une deuxième partie les principaux modèles mathématiques qui reproduisent l'activité neuronale. Certains de ces modèles génèrent les trois états comportementaux de l'activité neuronale qui sont : repos, impulsions (*spikes*) et trains d'impulsions (*bursts*).

Le dernier modèle présenté, qui est le modèle de Kuramoto, modélise uniquement le phénomène oscillant. L'analyse de ce modèle permettra de nous concentrer uniquement sur le comportement de phase et donc d'analyser le comportement de synchronisation. Dans ce cas, une première approche pour tenter de dégager le concept de "synchronisation", consiste à vérifier que les amplitudes de l'activité électrique d'un groupe de neurones oscillent à la même fréquence. Il nous faudra par la suite définir en détail ce que nous appellerons synchronisation. Ceci sera précisé rigoureusement d'un point de vue biologique à la section 2.1.4 et d'un point de vue de la théorie du contrôle aux sections 2.3.3.2, 3.2 et 3.3. Nous ferons une description des modèles de neurones les plus étudiés : modèle de Hodgkin-Huxley [60], FitzHugh-Nagumo [49], Hindmarsh-Rose [56, 57] et enfin le modèle de Kuramoto [77].

Nous présentons au chapitre 3 les principales définitions et les théorèmes généraux que nous avons utilisés pour la construction de deux réseaux de neurones et pour l'analyse de leurs propriétés de synchronisation et de stabilité. L'un des deux modèles de réseau de neurones sera établi à partir du modèle d'un neurone de Hindmarsh-Rose. Le second modèle sera établi à partir de certaines propriétés du modèle de Kuramoto. Nous détaillerons par la suite la construction de ces deux réseaux de neurones. Nous verrons que la manière dont le réseau composé de plusieurs systèmes dynamiques est interconnecté, peut-être représentée par un graphe. En faisant appel à la théorie des graphes, qui est la modélisation mathématique d'un réseau, certaines propriétés liées à la synchronisation des systèmes dynamiques peuvent être établies. Nous utiliserons donc cette théorie pour établir une écriture matricielle du modèle de réseau de neurones de Hindmarsh-Rose (voir chapitre 5). Nous définirons ensuite les différents types de synchronisation de systèmes interconnectés. Nous verrons notamment la définition d'un réseau complètement synchronisé et globalement complètement synchronisé, ainsi que la synchronisation asymptotique d'un réseau. Nous finirons ce chapitre en définissant ce qu'est un système semi-passif. Nous nous intéressons à ce type de systèmes car la semi-passivité assure la bornitude des solutions du système. D'autre part, le modèle de Hindmarsh-Rose possède cette propriété. Les chapitres 4 et 5 reportent ces résultats théoriques pour les deux modèles de réseaux établis. D'autre part, du point de vue de la théorie du contrôle, l'un des points commun entre les chapitres 4 et 5 est que les propriétés d'interconnexion tiennent un rôle crucial pour l'analyse de la synchronisation de réseaux. Dans ces deux chapitres, le cadre que nous proposerons pour faire cette analyse permet non seulement d'assurer la synchronisation asymptotique mais également de caractériser des ensembles invariants propres aux systèmes étudiés.

Au chapitre 4 nous proposons un modèle linéaire à variables complexes qui conserve certaines propriétés du modèle de Kuramoto lorsque l'interconnexion entre neurones est complète, c'est-à-dire que tous les neurones sont directement liés les uns aux autres et ce dans un sens comme dans l'autre. D'autre part, nous montrerons que le comportement asymptotique de ce modèle linéaire est le même que le modèle de Kuramoto. L'intérêt d'un tel modèle est que l'analyse des solutions et de la stabilité est relativement simplifiée par rapport aux modèles décrits par des systèmes d'équations aux dérivées ordinaires non linéaires, comme le modèle de Kuramoto. Nous présentons l'étude détaillée des propriétés de ce système, notamment l'étude des valeurs propres et des vecteurs propres qui nous permettra de déduire le comportement du système et ses propriétés de stabilité. Nous établirons entre autre, que les solutions de ce système linéaire convergent vers un cycle limite stable. C'est-à-dire qu'en respectant certaines conditions quant à la construction du modèle, un phénomène de synchronisation stable apparaît. De plus, nous montrerons que le comportement asymptotique de ce modèle linéaire coïncide avec le modèle de Kuramoto. Les

résultats de simulations présentés à la fin de ce chapitre illustrent le comportements du modèle linéaire introduit et confirme son équivalence asymptotique avec le modèle de Kuramoto.

Au chapitre 5 nous expliquons dans un premier temps comment nous avons construit le réseau de neurones où chaque neurone est modélisé par le modèle de Hindmarsh-Rose. Nous décrivons également l'interconnexion entre les neurones assurée par une matrice ayant certaines propriétés que nous analysons à l'aide de la théorie des graphes. Les propriétés de semi-passivité du modèle d'un neurone de Hindmarsh-Rose est étendue au réseau de Hindmarsh-Rose. A partir de cette propriété, nous établissons que le réseau ainsi constitué, peut être dans un état de synchronisation au sens pratique. Ensuite, nous donnons une estimation du comportement synchronisé pour un réseau de neurones hétérogène de Hindmarsh-Rose. Les différents neurones d'un réseau hétérogène produisent des signaux correspondant à différentes activités. Nous proposons à la fin de ce chapitre des résultats de simulations illustrant les résultats théoriques.

Enfin, nous terminerons par des conclusions générales ainsi que par des propositions de perspectives de recherches s'inscrivant dans la continuité de ce travail.

Les apports de cette thèse sont les suivants :

- Nous apportons des explications succinctes mais didactiques à propos de la communication entre neurones.
- Nous présentons les modèles de neurones fondamentaux ainsi qu'une étude exhaustive des différents types de synchronisation du point de vue de la théorie du contrôle.
- Nous analysons la stabilité au sens pratique de réseaux de systèmes non linéaires semi-passifs. Notre approche nous permet non seulement de montrer la synchronisation pratique de réseaux non linéaires mais aussi de caractériser le comportement synchronisé de ces réseaux. Nous appliquons ces résultats au réseau de neurones de Hindmarsh-Rose et nous montrons que sous certaines conditions le réseau se synchronise vers le comportement d'un neurone "moyen" de Hindmarsh-Rose.
- Nous reformulons les dynamiques des neurones décrites par le modèle de Kuramoto en proposant un modèle linéaire. A partir de cette reformulation nous dégageons certaines propriétés de stabilité et nous montrons que son comportement asymptotique est similaire au comportement asymptotique du modèle de Kuramoto.

Les travaux contenus dans ce rapport ont donné lieux aux communications suivantes :

- [28] L. Contevelle and E. Panteley, 'Linear reformulation of the Kuramoto model : asymptotic mapping and stability properties', 2nd Int. Conf. on Comm., Computing and Control Applications (CCCA), Décembre 2012.
- [30] L. Contevelle and E. Panteley, 'Practical synchronization in complex networks of non-identical dynamical nodes', 20th Proc. Int. Symp. on Math. Theory of Networks and Systems (MTNS), Juillet 2012, Melbourne, Australia.
- [29] L. Contevelle and E. Panteley, 'Practical synchronization in a network of non-identical Hindmarsh-Rose neurons', 4th Int. Interdiscip. Chaos Symp., 29 Avril - 2 Mai 2012, Antalya, Turkey.

- [31] L. Contevelle and E. Panteley, 'On asymptotic equivalence of the "all-to-all" Kuramoto model and certain linear system : stability analysis of phase locked solutions', European Control Conference (ECC), Juillet 2013, Zurich, Suisse.

Chapitre 2

Activité neuronale et modélisation mathématique : état de l'art

Nous aborderons dans ce chapitre l'aspect biologique et physiologique neuronal ainsi que la modélisation mathématique de l'activité neuronale. Nous ne rentrerons pas dans le détail, cette partie se voulant essentiellement didactique.

2.1 Le neurone du point de vue biologique

2.1.1 Le neurone

Un neurone (figure 2.1) est une cellule nerveuse présente dans le système nerveux cérébral qui sert à traiter l'information et à communiquer. Il est composé d'un noyau, qui est à la source de son existence et qui est situé dans le corps cellulaire. Il est également constitué d'un axone, de dendrites et de terminaisons nerveuses, qui permettent de relier les neurones entre eux. Un neurone a deux propriétés fondamentales : excitabilité et conductivité. En effet, toute cellule nerveuse est caractérisée par sa capacité à réagir (cette réaction est appelée potentiel d'action) à une information reçue (le stimulus), c'est la réactivité. Le terme conductivité signifie que chaque cellule peut transmettre à son tour une information via différents modes de communication : soit par émission d'un potentiel d'action, soit par transfert chimique ou électrique (nous y reviendrons dans la section 2.1.2). C'est par les dendrites que le neurone reçoit les informations. Les terminaisons axonales quant à elles permettent d'envoyer l'information. Ces terminaisons peuvent transmettre le message soit à une cellule nerveuse (neurone) soit à une cellule musculaire. Tous les composants d'un neurone sont délimités par la membrane cellulaire au travers de laquelle des échanges chimiques ou électriques peuvent avoir lieu (figure 2.2). L'espace entre les membranes cellulaires est appelé espace synaptique et l'ensemble membranes plus espace synaptique forme la synapse. La membrane cellulaire permet l'échange d'ions entre le milieu intracellulaire et extracellulaire. On trouve dans ces deux milieux entre autres ions, des ions K_+ (potassium) et des ions Na_+ (sodium). Il n'y a pas la même concentration d'ions dans chacun des milieux. De plus, puisque ces ions sont chargés électriquement ils créent une différence de potentiel entre le milieu intracellulaire et le milieu extracellulaire (potentiel membranaire) (figure 2.3). Le potentiel membranaire est soit à l'état de repos c'est-à-dire que le potentiel est constant et est d'environ -70mV , soit dans un état transitoire durant lequel est généré un potentiel d'action (PA). Cet état transitoire est très court, de l'ordre d'1ms et est provoqué par la réception d'un message nerveux. Dans la suite nous ferons une brève description de ces deux états.

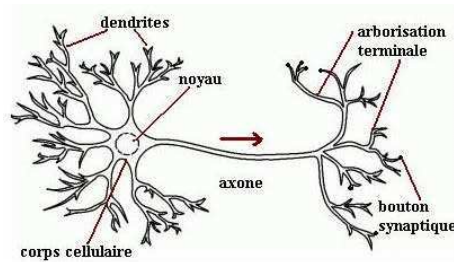


FIG. 2.1 – Schéma d'une synapse chimique et d'une synapse électrique.

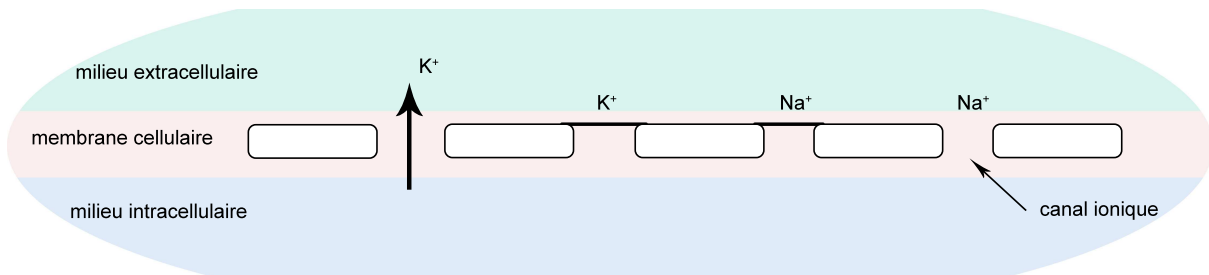


FIG. 2.2 – Canaux ioniques. Des canaux perméables aux ions Na^+ peuvent être ouverts mais sans laisser passer d'ions. Les canaux dont l'ouverture et la fermeture sont commandées par un signal électrique sont appelés canaux voltage-dépendants.

2.1.2 L'information à travers le neurone

Chaque cellule nerveuse contient des ions chargés électriquement dont la concentration est différente à l'extérieur et à l'intérieur de la cellule. C'est ce qui est à l'origine de la différence de potentiel membranaire. L'échange d'ions entre le milieu extracellulaire et le milieu intracellulaire se fait par des canaux ioniques. Certains canaux sont plus perméables à un type d'ion qu'à un autre, et permettent l'échange d'une certaine concentration de ces ions dans un sens défini par le gradient électrochimique. Lors d'un stimulus la perméabilité des canaux sera modifiée laissant ainsi passer des ions K^+ et des ions Na^+ de part et d'autre de la membrane cellulaire.

Potentiel de repos

A l'état de repos, il n'y a pas d'influx nerveux, le potentiel membranaire est d'environ -70mV (figure 2.3). Comme nous venons de le voir, le potentiel membranaire est dû à la différence de concentration des ions (chargés électriquement) à l'intérieur et à l'extérieur de la cellule. Les canaux ioniques, à travers lesquels se font les échanges, sont d'avantage perméables aux ions K^+

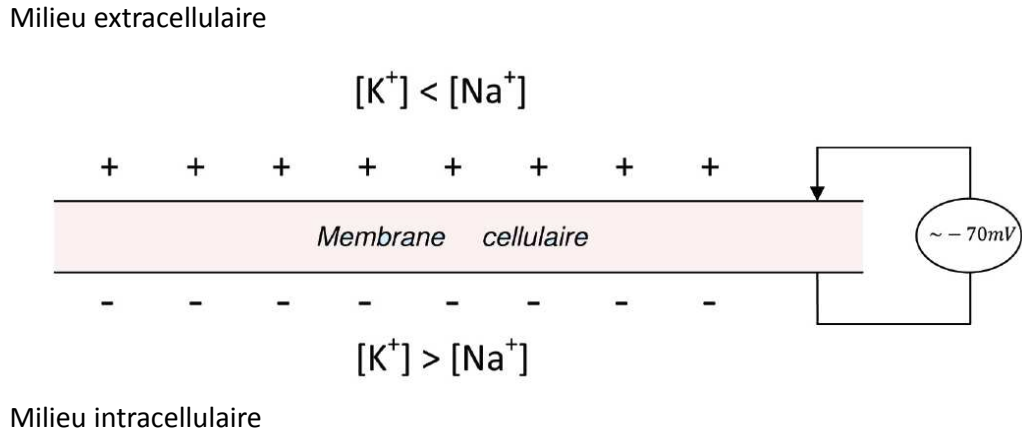


FIG. 2.3 – Potentiel membranaire à l'état de repos.

qu'aux ions Na_+ , ils laisseront donc passer plus d'ions K_+ d'un milieu à l'autre. Le gradient de concentration et la concentration élevée des ions K_+ à l'intérieur de la cellule entraînent une fuite de ces ions vers l'extérieur de la cellule, y apportant une charge positive (figure 2.2). Les échanges d'ions Na_+ étant moins importants, ils ne peuvent pas équilibrer le potentiel membranaire qui est alors négatif. Cet état de repos sera perturbé par un stimulus qui génèrera un PA.

Potentiel d'action

Pour produire un PA, un neurone reçoit un stimulus généré par un autre neurone. Ce PA devient un stimulus pour le neurone suivant jusqu'à ce que l'action soit exécutée (par exemple lors d'un mouvement musculaire). Ce message qui transite dans le système nerveux et qui arrive à une cible est appelé influx nerveux, il est généré par des phénomènes électriques et chimiques. L'équilibre à l'état de repos sera perturbé lorsque l'influx nerveux sera reçu par le neurone qui génèrera un PA. Le stimulus entraîne une réaction du neurone lorsque son amplitude voltaïque atteint une valeur seuil qui a pour effet d'activer ou de désactiver certains canaux ioniques. Ces canaux dont l'ouverture est commandée par le stimulus, sont appelés canaux voltage-dépendants. Le processus du PA est le suivant (figure 2.4) : la cellule reçoit un stimulus qui atteint la valeur seuil entraînant l'ouverture de canaux sodiques ayant pour conséquence l'augmentation du

potentiel membranaire. C'est l'étape de dépolarisation, le potentiel membranaire croît jusqu'à atteindre une valeur maximum caractéristique du neurone. A cet instant les canaux sodiques ouverts précédemment se referment progressivement ce qui a pour effet la diminution du potentiel. C'est l'étape de repolarisation. Par la suite des canaux potassiques s'ouvrent provoquant une hyperpolarisation (le potentiel devient inférieur à $-70mV$). Les canaux ouverts se referment et le potentiel membranaire retourne à l'état de repos.

Le signal électrique du potentiel d'action peut être une impulsion, voire plusieurs impulsions successives (*spikes*), ou des trains d'impulsions (*bursts*) séparés par une période de repos (ou silence), voir figure (2.5)

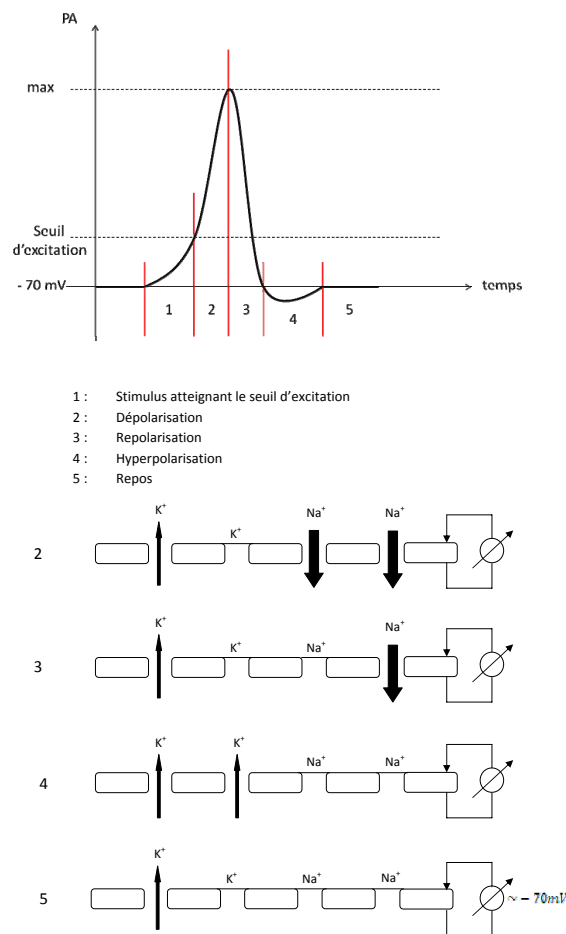


FIG. 2.4 – Potentiel d'action et mouvements ioniques.

Nous avons vu qu'à travers l'espace synaptique des échanges chimiques et électriques avaient lieu. Nous allons voir un peu plus en détail comment ces échanges se font, assurant ainsi la connexion neuronale.

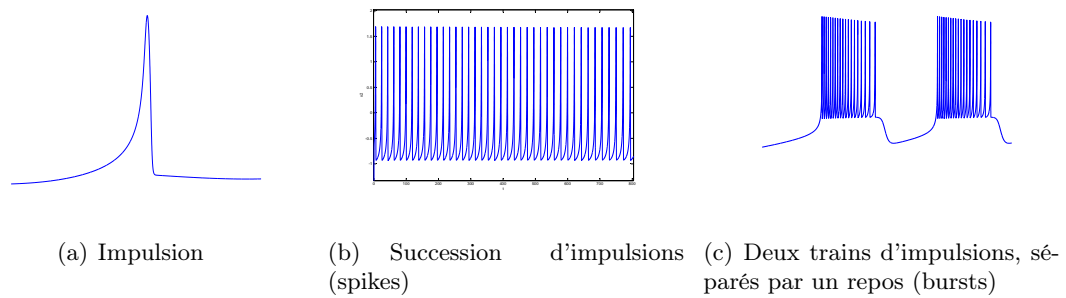


FIG. 2.5 – Différents potentiels d'action

2.1.3 Connexion entre neurones

Les neurones sont connectés les uns aux autres afin de transmettre un signal électrique. Cette transmission se fait au niveau de la synapse via les synapses chimiques [107] et/ou les synapses électriques (ou encore appelées jonctions communicantes) [8]. Les synapses chimiques sont plus utilisées que les synapses électriques. Ces synapses relient un neurone présynaptique (neurone émetteur du signal) à un ou plusieurs neurones postsynaptiques (neurones récepteurs). L'information véhiculée aura pour effet de modifier les potentiels membranaires. On parle de potentiel présynaptique et postsynaptique.

Synapses chimiques

Via les synapses chimiques le potentiel d'action entraîne une libération de neurotransmetteurs. Ils transitent du neurone présynaptique au neurone postsynaptique par la fente synaptique. Les neurotransmetteurs sont reçus par les récepteurs du neurone postsynaptique, ce qui entraîne une variation du potentiel postsynaptique. Une synapse chimique est soit excitatrice soit inhibitrice c'est-à-dire que le potentiel postsynaptique sera dépolarisé ou hyperpolarisé.

Synapses électriques

Les synapses électriques assurent la communication entre des neurones collés par l'échange d'ions au travers de canaux reliant les milieux intracellulaires. Le passage des ions peut se faire dans les deux sens. Ces voies de communication ont un rôle très important dans l'activité rythmique (synchronisation) des neurones (voir la section 2.1.4). Leur rôle a été mis en évidence expérimentalement dans [10, 39].

Dans la suite de cette section nous mettons simplement en avant que l'activité des neurones est oscillatoire et est impliqué dans différentes fonctions physiologiques comme la mémoire, le mouvement, la concentration. La section qui suit est une approche très succincte de l'activité neuronale.

2.1.4 Activité neuronale, synchronisation - désynchronisation

Activité normale

Chaque neurone émet un signal électrique lorsqu'il reçoit un stimulus. L'électro-encéphalographie (EEG) est une technique de mesure spécifique qui permet de relever l'activité électrique du cer-

veau, via des électrodes de mesures placées sur le cuir chevelu. La technique est apparue dans les années 1920 et c'est dans les années 50 qu'elle a été introduite dans la médecine. Cette méthode permet de mesurer des activités rythmiques provenant de groupes de neurones situés dans différentes zones du cerveau. C'est ainsi que l'activité oscillatoire des neurones a pu être classifiée suivant la fréquence des oscillations générées (tableau 2.1). Il a été établi que la synchronisation des neurones peut se faire au sein d'une même région du cerveau ou bien entre différentes régions. D'autre part, les fonctions motrices sont principalement générées par des oscillations dans les bandes fréquentielles δ , θ , β et γ au niveau du noyau sous-thalamique (qui fait partie de la zone des ganglions de la base), du thalamus, ou encore entre le cortex et le thalamus (figure 2.6). La synchronisation de l'activité dans la bande fréquentielle γ est responsable par exemple de la perception et de l'attention. De manière générale, l'activité synchronisée est en jeu lors de mouvements physiologiques comme les contractions cardiaques, la respiration, ou lors de mouvements volontaires durant lesquelles les oscillations β dans le globus pallidus (qui est une sous-partie des ganglions de la base) et dans le noyau sous-thalamique diminuent. Pour plus de détails sur le lien entre les activités oscillatoires des neurones et les fonctions motrices se reporter à [36]. Bien que le lien exact entre les symptômes et l'activité neuronale reste encore flou [45], on comprend aisément que les maladies neurologiques peuvent affecter la mémoire, la perception, les mouvements....

Bandes de fréquences	Fréquences (Hz)
δ	1 – 4
θ	4 – 8
α	8 – 12
β	12 – 30
γ	30 – 80
γ rapides	80 – 200
γ ultrarapides	200 – 600

TAB. 2.1 – Classifications de l'activité oscillatoire des neurones

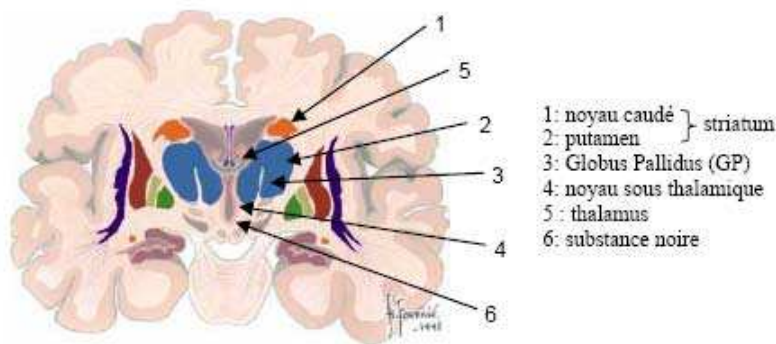


FIG. 2.6 – Ganglions de la base.

Le dysfonctionnement de l'activité oscillatoire entraînerait des troubles de la mémoire, de l'humeur (elle serait impliquée dans la démence ou encore dans la schizophrénie). Ce dysfonc-

tionnement entraîne également des symptômes souvent liés au mouvement comme dans le cas de la maladie de Parkinson ou encore lors d’une crise d’épilepsie [63].

Activité pathologique : le tremblement et la maladie de Parkinson

La maladie de Parkinson est neurodégénérative, elle est caractérisée par la mort lente des neurones. Les symptômes sont multiples et principalement liés au mouvement car les zones les plus touchées sont celles qui commandent la motricité. Le tremblement de repos est un des symptômes de cette maladie. Le tremblement serait du à une activité oscillatoire ($4 - 9Hz$ et $11 - 14Hz$) synchronisée dans la zone cérébrale des ganglions de la base (figure 2.6) [87], ou dans le thalamus [63]. Dans le noyau sous-thalamique ce serait les oscillations β qui augmenteraient [17]. Ce dysfonctionnement de l’activité serait du à une déficience dopaminergique. La dopamine est un neurotransmetteur primordial à la communication entre les neurones. Une déficience en dopamine entraîne un dysfonctionnement moteur [16]. Des traitements médicamenteux existent et sont donc à base de dopamine, ce qui a pour effet de diminuer les oscillations. D’autre part lorsque la maladie est à un stade plus avancé, ou si le traitement n’a pas l’effet escompté, la solution actuelle est la stimulation cérébrale profonde. Cette méthode a été introduite à la fin des années 80 par l’équipe du professeur Bénédict [7]. Elle consiste à implanter une ou plusieurs électrodes dans une zone du cerveau. Grâce à cette électrode un signal électrique est envoyé dans la zone ciblée, afin de détruire l’activité oscillatoire pathologique. Le signal électrique est généré par un stimulateur (pacemaker). L’étude de la synchronisation et de la stabilité de l’activité neuronale est donc motivée par l’analyse, d’un point de vue de l’automatique, du système formé par les neurones et le stimulateur cérébral profond. Cette thèse porte sur la partie analyse de la synchronisation de modèles de réseaux neuronaux.

2.2 Modélisation mathématique d’un neurone

La modélisation mathématique du système neuronal [8, 37, 49, 56, 57, 60, 88] est motivée par l’intérêt d’étudier le fonctionnement normal et pathologique de l’activité neuronale. Dans le cas pathologique, la compréhension du fonctionnement normal amène à trouver des solutions pour les patients souffrants de maladie neurologique altérant le bon fonctionnement moteur, voire moral (voir section 2.1.4). La stimulation cérébrale profonde est une des alternatives aux traitements médicamenteux, beaucoup de travaux portent sur ce sujet [7, 9, 55, 70, 103, 116]. Les premiers travaux ayant un impact conséquent dans l’étude de l’activité du système nerveux ont été réalisés par Alan Llyod Hodgkin et Andrew Huxley. C’est en 1952 qu’ils publièrent un premier modèle mathématique (modèle de Hodgkin-Huxley) composé d’équations non linéaires ordinaires décrivant la production et la propagation de l’influx nerveux [60]. Ce modèle est établi sur la base d’expériences menées sur le système nerveux du calmar géant. Ces travaux, pour lesquels ils obtinrent en 1953 le prix Nobel en physiologie - médecine, mettent en évidence l’existence de canaux ioniques sélectifs et voltage-dépendants dans la génération du potentiel d’action. Ce modèle à quatre équations différentielles est à la base de nombreux autres [1, 56, 67, 68, 75] qui en sont des simplifications. Les deux principaux intérêts de ces modèles sont qu’ils permettent de modéliser un ou plusieurs neurones connectés et leur analyse est plus simple, contrairement aux modèles présentés dans [41] et [58] (beaucoup plus complexes mais plus proches de la réalité) et dans [96] qui présente un modèle à sept équations différentielles du premier ordre, qui découle du modèle de Hodgkin-Huxley. Le modèle de FitzHugh-Nagumo [49] que nous décrivons dans la suite est une des premières simplifications du modèle de Hodgkin-Huxley, il est basée sur

des expériences. Par la suite, J.L. Hindmarsh and T.M. Rose proposèrent deux modèles [56,57]. Le second modèle est une extension du premier afin de mettre en évidence d'autres types de comportements neuronaux que nous établirons dans la suite.

2.2.1 Modèle de Hodgkin-Huxley

Le modèle proposé par A.L. Hodgkin et A. Huxley est une description du mécanisme des canaux ioniques responsables de l'influx nerveux. Ce modèle décrit l'activité d'un neurone : caractéristiques électriques et forme du potentiel d'action (figure 2.5). Il est composé de quatre équations différentielles qui modélisent les courants ioniques des deux principaux ions responsables de l'influx nerveux : ions potassiques (K_+) et sodiques (Na_+). Pour établir le modèle la membrane cellulaire est modélisée par un circuit électrique (figure 2.7). Le rôle des canaux ioniques est de laisser passer ou non des ions. Ce passage d'ions génère un courant électrique (I_K et I_{Na}) variable (ce qui justifie les résistances variables). D'autre part, on a vu que certains canaux restaient toujours en position ouverte laissant passer les ions, le courant généré est constant et est appelé courant de fuite (I_l). Le potentiel membranaire qui est variable, est modélisé par la tension au travers d'une capacité ($C \simeq 1\mu F/cm^2$). Le modèle de Hodgkin-Huxley est le suivant :

$$\begin{cases} C\dot{V} = I_{Na} + I_K + I_l - I_T \\ \dot{n} = \alpha_n(1-n) - \beta_n n \\ \dot{m} = \alpha_m(1-m) - \beta_m m \\ \dot{h} = \alpha_h(1-h) - \beta_h h, \end{cases} \quad (2.1)$$

où V est la tension au borne du condensateur C (voir figure 2.7) qui représente le potentiel membranaire, m est la probabilité que le canal sodique soit ouvert, n est la probabilité que le canal potassique soit ouvert et h est la probabilité que les canaux sodiques laissent passer des ions Na_+ . Contrairement aux canaux potassiques, les canaux sodiques ne laissent pas forcément passer les ions Na_+ lorsqu'il sont ouverts, d'où la probabilité h . $\alpha_n, \beta_n, \alpha_m, \beta_m, \alpha_h, \beta_h$ sont des coefficients qui dépendent du potentiel membranaire, tels que :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{0.01(10-V)}{e^{(1-0.1V)}-1} \quad , \quad \beta_n = 0.125e^{-0.0125V}, \\ \alpha_m &= \frac{0.1(25-V)}{e^{(2.5-0.1V)}-1} \quad , \quad \beta_m = 4e^{-\frac{V}{18}}, \\ \alpha_h &= 0.07e^{0.05V} \quad , \quad \beta_h = \frac{1}{e^{(3-0.1V)}+1}. \end{aligned}$$

De plus, d'après le schéma électrique d'un neurone (figure 2.7) et compte tenue des probabilités n , m et h , l'expression respective des courants I_{Na} , I_K et I du système (2.1) sont :

$$\begin{cases} I_{Na} = m^3 h g_{Na} (V - E_{Na}) \\ I_K = n^4 g_K (V - E_K) \\ I_l = g_l (V - E_l) \end{cases} \quad (2.2)$$

où $g_{Na}, g_K, g_l \in \mathbb{R}_+$ sont les conductances, I est le courant total, V est le potentiel membranaire, $E_{Na}, E_K, E_l \in \mathbb{R}$ sont les potentiels d'équilibre des ions. Les paramètres $I, g_{Na}, g_K, g_l, E_{Na}, E_K, E_l$ sont des constantes. On peut trouver dans la littérature les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} E_{Na} &= 115mV & , & & E_K &= -12mV & , & & E_l &= 10.6mV \\ g_{Na} &= 120mS/cm^2 & , & & g_K &= 36mS/cm^2 & , & & g_l &= 0.3mS/cm^2 \end{aligned}$$

Le modèle de neurone (équation 2.1) peut se réécrire :

$$\begin{cases} C\dot{V} = m^3 h g_{Na} (E_{Na} - V) + n^4 g_K (E_K - V) + g_l (E_l - V) + I \\ \dot{n} = \alpha_n (1 - n) - \beta_n n \\ \dot{m} = \alpha_m (1 - m) - \beta_m m \\ \dot{h} = \alpha_h (1 - h) - \beta_h h, \end{cases} \quad (2.3)$$

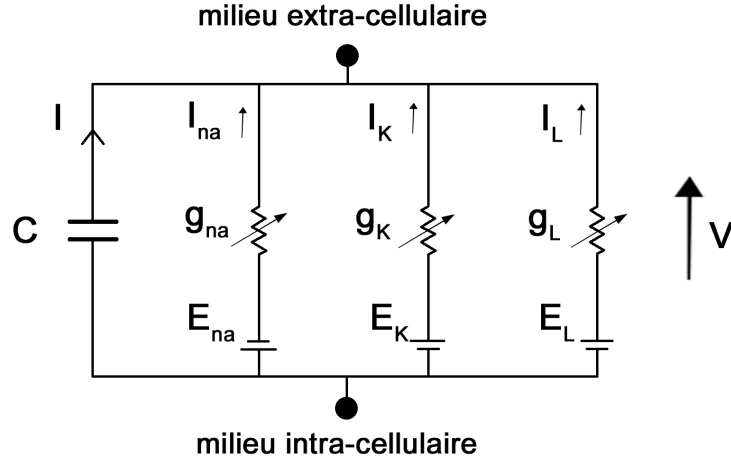


FIG. 2.7 – Schéma électrique de la membrane.

La complexité de ce système rend l'analyse mathématique des réseaux neuronaux difficile, c'est pourquoi R. FitzHugh a proposé un modèle [49] essayant de générer la même réponse que le modèle de Hodgkin-Huxley qui reproduit les trois types de comportements de l'activité neuronale : silence, spiking et bursting (figure 2.5).

2.2.2 Modèle de FitzHugh-Nagumo

En 1961, R. FitzHugh propose une réduction à deux équations [49] du modèle de Hodgkin-Huxley à partir d'observations expérimentales donnant lieu à des approximations. Ce modèle a été généralisé en 2012 dans [43, 53]. En 1962, J. Nagumo *et al* établirent le modèle électrique [91] associé. C'est à partir des observations suivantes que le modèle a pu être établi :

- rapidité de l'activation du sodium, d'où l'approximation : $\dot{m} = 0 \Leftrightarrow m = m_\infty$, où m_∞ est une constante telle que : $m_\infty = \alpha_m / (\alpha_m + \beta_m)$
- la somme des variables n et h est une constante, généralisée par : $h + an = b$, où a et b sont des constantes. Soit $w = b - h = an$ et $\dot{w} = \alpha_w(1 - w) - \beta_w w$

Le système (2.3) devient :

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{1}{C} \left(g_{Na} m_{\infty}^3 (b - w) (E_{Na} - V) + g_K \left(\frac{w}{a} \right)^4 (E_K - V) + g_l (E_l - V) + I \right) \\ \dot{w} = \alpha_w (1 - w) - \beta_w w, \end{cases} \quad (2.4)$$

ou encore¹ :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha (y - f(x) + I(t)) \\ \dot{y} = \beta (g(x) - y), \end{cases} \quad (2.5)$$

où x est le potentiel membranaire et y le flux d'ions à travers la membrane, α et $\beta \in \mathbb{R}$ sont des constantes, f est une fonction cubique, g une fonction linéaire. La soustraction de ces deux fonctions doit se comporter comme une exponentielle.

Mais la réponse de ce modèle (qui représente le potentiel membranaire) à un courant appliqué n'est pas aussi rapide que dans la réalité et il ne permet pas de générer complètement l'activité neuronale. En effet, il y a trois types de comportement : le repos, les impulsions successives (spikes) et les trains d'impulsions entrecoupés de périodes repos (bursts) [66, 100]. Le modèle de Fitzhugh-Nagumo ne permet pas de générer de silences ni de bursts du à une réponse trop lente. C'est pourquoi J.L. Hindmarsh and R.M. Rose proposèrent deux autres modèles.

2.2.3 Modèle de Hindmarsh-Rose

Le modèle général de 1982 de Hindmarsh-Rose [56] est similaire au modèle de Fitzhugh-Nagumo. Il améliore la rapidité de la réponse, mais ne permet pas de générer les trois états types de l'activité neuronale. C'est ce qu'apporte le modèle à deux équations puis à trois équations de Hindmarsh-Rose proposé en 1984 [57]. Ce modèle est l'objet de nombreux travaux, comme dans [6, 24, 54, 106, 127].

2.2.3.1 Modèle à deux équations

La forme générale de ce modèle [57] est similaire au système d'équations (2.5), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(x) + I(t) \\ \dot{y} = g(x) - y \end{cases} \quad (2.6)$$

Suite à des observations expérimentales et des considérations mathématiques, les fonctions f et g sont définies comme suit :

- $f(x)$ est une fonction cubique dont le maximum local est en zéro et $f(0) = 0$. Les auteurs ont choisi la forme particulière : $f(x) = ax^3 - bx^2$.
- $g(x)$ est une fonction quadratique centré en zéro. La fonction $g(x)$ est donc de la forme : $g(x) = c - dx^2$

Les fonctions f et g ont leur maximum en une même valeur de x afin de simplifier l'étude du système. Le modèle de Hindmarsh-Rose à deux équations est donc :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 - bx^2 + I \\ \dot{y} = c - dx^2 - y, \end{cases} \quad (2.7)$$

¹Les variables choisies pour décrire ces modèles dans la littérature peuvent être abstraites suivant que le modèle s'éloigne de l'aspect physiologique. Ici, la variable x représente la variable V .

où x est le potentiel membranaire, y est le flux d'ions, I est la perturbation (qui représente le courant appliqué), a, b, c et d sont des constantes $\in \mathbb{R}_+$. Dans la littérature [57, 106], on peut trouver comme valeurs de ces constantes définies expérimentalement : ($a = 1, b = 3, c = 1, d = 5$), ou encore dans [24] : ($a = 1, b = 2.8, c = 0, d = 4.4$).

La réponse qui est plus rapide que celle des modèles précédents et plus réaliste, permet de générer plusieurs potentiels d'actions successifs (spikes) par l'action de la variable I . Cette variable empêche le système de revenir à un état d'équilibre, c'est-à-dire un état constant. Mais l'action de I n'est pas suffisante pour générer des bursts.

2.2.3.2 Modèle à trois équations

Le modèle à trois équations permet de générer des bursts en plus de l'équilibre (état de repos) et des spikes par l'introduction d'une troisième variable d'état $z(t)$, qui modélise les flux lents d'ions. La dynamique de $z(t)$ est linéaire et est définie par :

$$\dot{z} = r(s(x - x_1) - z),$$

avec r et s deux constantes $\in \mathbb{R}_+$ qui détermineront la réponse du système, le paramètre $x_1 \in \mathbb{R}$ est le point d'équilibre du système (2.7) pour $I = 0$. Introduite dans l'équation de \dot{x} , l'équation de l'état représenté par $z(t)$, permet de créer une instabilité, tout comme la perturbation I et ainsi de générer des bursts. On obtient le modèle de Hindmarsh-Rose à trois équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 - bx^2 + I - z \\ \dot{y} = c - dx^2 - y \\ \dot{z} = r(s(x - \hat{x}) - z) \end{cases} \quad (2.8)$$

Les paramètres a, b, c, d sont les mêmes que définies précédemment. \hat{x} est un point d'équilibre du système non perturbé ($I = 0$) défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 - bx^2 \\ \dot{y} = c - dx^2 - y, \end{cases} \quad (2.9)$$

et est un des points d'intersection des isoclines nulles x et y : $\dot{x} = 0 = \dot{y} \Rightarrow f(x) = g(x)$. Cette équation peut avoir une ou trois solutions suivant les valeurs des paramètres a, b, c, d [57].

L'introduction de la variable z dans l'équation de \dot{x} sert à la fois à générer des trains de potentiels d'action et à stopper plus rapidement que ne le permet le modèle à deux équations les potentiels d'action successifs (spikes). Ainsi la réponse du système est plus réaliste. Les différents comportements de ce modèle ont été analysés dans la littérature : l'analyse de la bifurcation du modèle en fonction des paramètres du système est proposée dans [106]. On trouve dans la littérature le jeu de paramètres $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, r = 0.001$. L'implication de l'amplitude de I dans la forme de la réponse est mise en évidence expérimentalement dans [57]. Pour ces valeurs de paramètres a, b, c, d, r et pour $s = 4$ et suivant les valeurs du paramètre I , on a :

- $I = 0.4 \Rightarrow$ impulsions successives et retour à l'état de repos
 $I = 1 \Rightarrow$ une seule impulsion
 $I = 2 \Rightarrow$ trains d'impulsions (dans chaque train il y a le même nombre d'impulsions, voir figure 2.8)
 $I = 4 \Rightarrow$ impulsions successives sans retour à l'état de repos (voir figure 2.9)

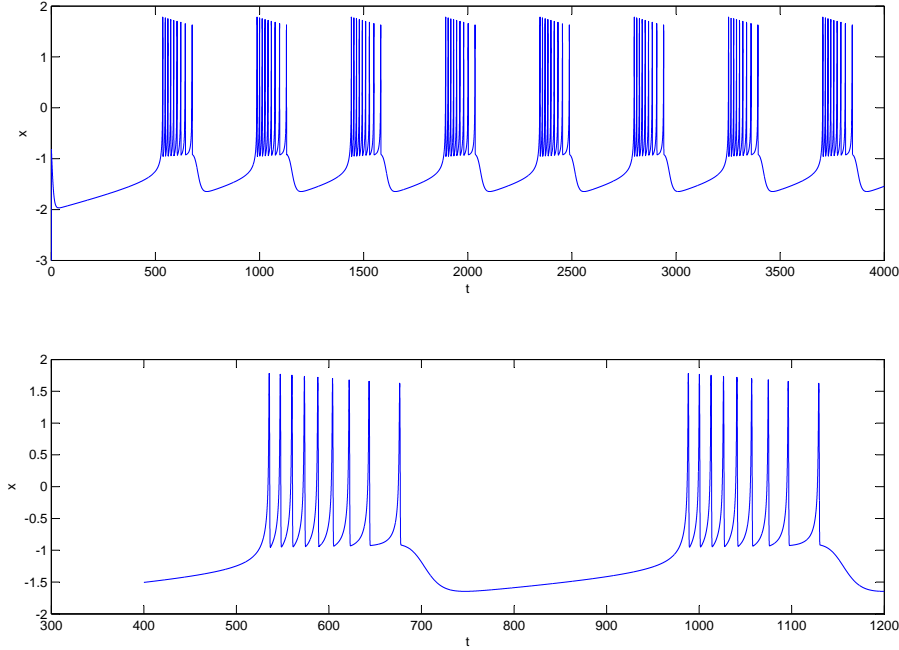


FIG. 2.8 – Réponse du modèle à trois équation de Hindmarsh-Rose, pour les valeurs de paramètres suivantes : $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, r = 0.001, s = 4$ et pour $I = 2$. Les trains d'impulsions ont le même nombre d'impulsions.

Pour le même jeu de paramètres défini précédemment, si on modifie la valeur de s avec $s = 1$, pour $I = 1$, le système générera des impulsions successives et pas qu'une seule impulsion. Dans [106], avec le jeu de paramètres suivant : $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, r = 0.005, s = 4$ et $I = 3.25$, le système génère des trains d'impulsions et chaque train a un nombre d'impulsions variant entre 7 et 3.

Tous les systèmes décrits précédemment sont établis pour un neurone. En introduisant une fonction d'interconnexion neuronale dans chaque système on peut modéliser la communication entre les neurones. On peut écrire les systèmes d'équations qui décrivent les dynamiques des neurones sous la forme plus générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_x(x, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \dot{\mathbf{q}} = f_q(x, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \end{cases} \quad (2.10)$$

où $x \in \mathbb{R}$ est le potentiel membranaire, $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_Q]^T \in \mathbb{R}^Q$ est le vecteur des variables auxiliaires du système. Pour le cas du modèle de Hodgking-Huxley, $\mathbf{q} = [n, m, h]^T \in \mathbb{R}^3$, dans

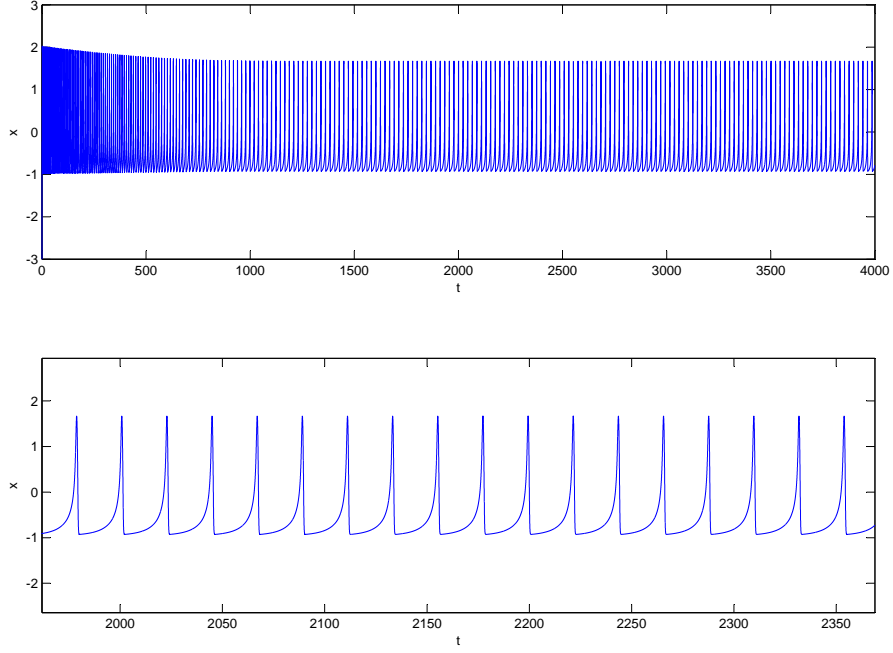


FIG. 2.9 – Réponse du modèle à trois équation de Hindmarsh-Rose, pour les valeurs de paramètres suivantes : $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, r = 0.001, s = 4$ et pour $I = 4$.

le cas du modèle de FitzHugh-Nagumo $q = [y] \in \mathbb{R}$ et dans le cas du modèle de Hindmarsh-Rose $\mathbf{q} = [y, z]^T \in \mathbb{R}^2$. D'autre part, $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_m]^T \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des paramètres du système, m est le nombre de paramètres. Par exemple, pour le modèle de Hindmarsh-Rose (2.8) $\mathbf{p} = [a, b, I, c, d, r, s, \hat{x}]^T$ et les fonctions f_x, f_q sont de la forme suivante :

$$f_x(x, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = q_1 - p_1 x^3 - p_2 x^2 + p_3 - q_2$$

$$f_q(x, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} p_4 - p_5 x^2 - q_1 \\ p_6 (p_7 (x - \hat{x}) - q_2) \end{bmatrix}$$

2.3 Connexion neuronale et modélisation de réseaux neuronaux

2.3.1 Modèles de connexions neuronales

Dans les modèles de neurones décrits précédemment par les systèmes d'équations (2.3), (2.5) et (2.8), la connexion neuronale n'est pas prise en compte de manière directe. Les effets de l'interconnexion sont implicites au terme I qui correspond au stimulus et qui, par conséquent, est généré par un autre neurone. Afin de décrire l'interaction entre un neurone et tous les neurones qui lui sont connectés on introduit une fonction de connexion notée u_{ext} ². On a vu à la section 2.1.3 qu'il existe deux types de voies communicantes que l'on nommera connexion : la connexion synaptique

²Il serait peut-être plus approprié d'utiliser la variable I_{ext} , mais dans la littérature et du fait que les modèles perdent leur sens physiologique, la notation u_{ext} est utilisée

(connexion assurée par les synapses chimiques) et la connexion électrique (connexion assurée par les synapses électriques). Dans la littérature, les termes : couplage synaptique et interconnexion synaptique, désignent une connexion synaptique. Les termes : couplage diffusif, interconnexion diffusive, jonction communicante (*gap junction*), désignent une connexion électrique. Le système (2.10) s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_x(x, \mathbf{q}, \mathbf{p}) + u_{ext} \\ \dot{\mathbf{q}} = f_q(x, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases} \quad (2.11)$$

Cette forme est également valable pour décrire les modèles de Hodgkin-Huxley et de FitzHugh-Nagumo. En reprenant cette écriture, on établit le modèle général de neurones connectés appelé réseau de neurones et on a :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbf{u}_{ext} \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_q(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \end{cases} \quad (2.12)$$

avec $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de neurone, $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \dots, \mathbf{q}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{mn}$, m est le nombre de variables auxiliaires du système, $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{ln}$, l est le nombre de paramètres du système. Les fonctions F_x, F_q sont telles que :

$$\mathbf{F}_x(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_x(x_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \\ \vdots \\ f_x(x_n, \mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_q(x_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \\ \vdots \\ f_q(x_n, \mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n) \end{bmatrix}$$

Enfin, \mathbf{u}_{ext} est définie dans [4, 6, 24] pour une connexion synaptique et dans [24, 93, 94, 108] pour une connexion diffusive. Nous détaillons ces deux cas ci-dessous.

Connexion synaptique

Pour construire un réseau de neurones une première modélisation de \mathbf{u}_{ext} assurant une connexion synaptique est définie par la fonction non linéaire suivante ³ [4, 6, 24] :

$$\mathbf{u}_{ext} = -g_s \tilde{\mathbf{x}} \odot \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}),$$

où $g_s \in \mathbb{R}$ est une constante qui représente la force de couplage synaptique, $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N]^T \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ est le nombre de neurone, avec $\tilde{x}_i = x_i - V_s$ et $V_s \in \mathbb{R}$ est une constante représentant le potentiel d'inversion synaptique. Si $x_i < V_s$ la synapse est excitatrice, à l'inverse elle est inhibitrice. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est la matrice de connexion entre les neurones dont les éléments notés a_{ij} représente la connexion du neurone j vers le neurone i . La matrice \mathbf{A} est la matrice d'adjacence (voir section 3.1). Les éléments a_{ij} se définissent, comme nous le verrons à la section 3.1, par l'équation (3.1). On notera que la matrice \mathbf{A} n'est pas nécessairement symétrique car lorsque le neurone j agit sur le neurone i , le neurone i n'agit pas forcément sur le neurone j . De plus, $a_{ii} = 0, \forall i$ puisqu'un neurone n'agit pas sur lui même. $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N$ est un vecteur

³ \odot désigne le produit de Hadamard terme à terme.

qui contient les fonctions de couplage synaptique notées $\Gamma(x_i)$ pour les n neurones, telle que $\Gamma(x_i) = 1/[1 + \exp(-\lambda(x_i - \Theta_s))]$ (il s'agit d'une fonction sigmoïde qui tend vers l'échelon de Heaviside lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$ tend vers l'infini). Enfin, $\Theta_s \in \mathbb{R}$ est une constante représentant le seuil à partir duquel le neurone j change le comportement du neurone i [6].

Le système (2.12) devient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - g_s \tilde{\mathbf{x}} \odot \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_q(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases} \quad (2.13)$$

A présent, nous allons présenter le modèle de connexion diffusive.

Connexion diffusive

Les effets de la connexion diffusive peuvent être décrits par une fonction de couplage linéaire de la forme $\mathbf{\Gamma}_{ij}(x_i - x_j)$, où $\mathbf{\Gamma}$ est la conductance synaptique et $x_j - x_i$ est la différence de potentiel entre le neurone j (le neurone présynaptique) et le neurone i (le neurone postsynaptique). Dans ce cas la fonction \mathbf{u}_{ext} s'écrit [24, 93, 94, 108] :

$$\mathbf{u}_{ext} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{x},$$

avec $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ la matrice de connexion suivante :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=2}^N \gamma_{1j} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \gamma_{N1} & \dots & & -\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_{Nj} \end{bmatrix}$$

Si $\gamma_{ij} > 0$ les neurones i et j sont connectés et la connexion se fait du neurone j vers le neurone i . Si $\gamma_{ij} = 0$, il n'y a pas de connexion entre les neurones i et j . Les γ_{ij} sont appelés les coefficients de conductance des synapses. Le système (2.12) devient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbf{\Gamma} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_q(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases} \quad (2.14)$$

2.3.2 Le neurone vu comme un oscillateur

Nous l'avons vu, un neurone produit un ou plusieurs potentiels d'actions, ce sont les impulsions (spike) ou les trains d'impulsions (burst). Les modèles de neurones que nous avons présentés jusqu'à maintenant génèrent une réponse plus ou moins proche de la réelle activité électrique neuronale. Cependant, l'analyse et l'étude de la stabilité de ces systèmes sont très difficiles. Les difficultés sont dues au nombre d'équations des différents modèles et au nombre de paramètres à fixer pour être soit un état de burst, soit de spikes. D'autre part, comme nous l'avons vu à la section 2.1.4, un sujet important faisant l'objet de nombreux travaux porte sur l'étude de la synchronisation [8, 37, 86, 107, 115].

Le modèle d'Andronov-Hopf⁴ [3] est à l'origine des modèles mathématiques d'oscillateurs non

⁴Dans la littérature, le modèle d'Andronov-Hopf est également appelé modèle de Landau-Stuart

linéaires. D'autre part, N. Wiener a su mettre en rapport le phénomène d'oscillations avec l'activité rythmique des neurones [123]. Par la suite, le modèle complexe de Andronov-Hopf, qui modélise un seul oscillateur, a été proposé par Winfree [124]. Le modèle de Kuramoto est une réduction du modèle de Andronov-Hopf étendu à plusieurs oscillateurs interconnectés. Il caractérise le comportement limite du modèle d'Andronov-Hopf.

Si nous nous intéressons uniquement au phénomène de synchronisation des réseaux neuronaux, on peut simplifier la modélisation de l'activité neuronale par un modèle plus simple. Un modèle très étudié permettant de coupler une grande quantité de neurones (ce que ne permettent pas toujours les modèles décrits précédemment) et d'étudier la synchronisation est le modèle de Kuramoto [77]. C'est certainement le modèle le plus simple pour représenter l'activité oscillatoire neuronale.

Si l'activité d'un neurone présente des impulsions régulières, alors il existe un cycle limite dans l'espace de phase. Ainsi, le neurone peut être vu comme un simple oscillateur ayant une fréquence constante. Son activité peut donc être décrite par une seule variable au risque de perdre les informations sur les échanges ioniques et sur le détail de la réponse dynamique des impulsions. Même si le modèle est très simpliste, il permet de révéler les caractéristiques intrinsèques de l'activité d'une population de neurones. En particulier, ce modèle peut décrire l'apparition d'une synchronisation d'un groupe de neurones connectés et il permet également de générer un large panel d'oscillations. Le modèle de Kuramoto est très utilisé pour étudier les oscillations de l'activité cérébrale [14, 27, 37, 51, 69, 110]. De ce fait, de nombreuses extensions du modèle ont été proposées afin de mieux l'adapter à la modélisation de systèmes neurobiologiques. Un exemple d'extension est l'intégration de propriétés topologiques de la connectivité corticale [14, 21].

De plus, le modèle de Kuramoto est largement utilisé pour comprendre les effets de la stimulation cérébrale profonde sur la synchronisation neuronale. Il est également utilisé pour proposer une méthode de stimulation cérébrale en boucle fermée en utilisant des modèles biophysiques en complément. Par exemple, de nombreuses techniques de simulations ont été développées dans [112–114], qui utilisent des réseaux d'oscillateurs de phase pour analyser la désynchronisation en phase de ces oscillateurs, avec des stimuli dégradant le moins possible les tissus neuronaux. Dans [50–52] sont étudiés les effets d'une stimulation par un signal proportionnel à la mesure du signal moyen. Il est montré que de telles stimulations peuvent induire soit une désynchronisation, soit une inhibition des oscillations de la population de neurones stimulée.

Dans ce qui suit, nous faisons la description du modèle de phase de Kuramoto et présentons quelques résultats existants qui portent sur la synchronisation de ce modèle. Nos résultats sur l'analyse du modèle de Kuramoto seront présentés au chapitre 4.

2.3.3 Modèle de Kuramoto

2.3.3.1 Généralités

Le modèle de Kuramoto [77] décrit l'évolution de la phase instantanée de N oscillateurs ($N \geq 2$) couplés. Il a été introduit en 1984 par Yoshiki Kuramoto, pour décrire l'activité d'oscillateurs couplés afin d'étudier le phénomène de synchronisation collective spontanée qui apparaît lorsqu'un grand nombre d'oscillateurs est couplé [124] pour une fréquence constante. Chaque oscillateur est décrit suivant sa phase par une équation différentielle et est couplé aux autres oscillateurs par une différence de phase. Ainsi pour modéliser $N \geq 2$ oscillateurs couplés on a N équations différentielles. Son intérêt est double : faciliter la modélisation d'un grand nombre

d'oscillateurs interconnectés (ou neurone interconnectés) et d'étudier la synchronisation de ce groupe de neurones. Le modèle pour N oscillateurs interconnectés est le suivant :

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) \quad (2.15)$$

où les $\theta_i(t)$, $\dot{\theta}_i(t)$ et $\omega_i \in \mathbb{R}$ représentent respectivement la phase instantanée, la fréquence instantanée et la fréquence naturelle⁵ de chaque oscillateurs i , $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$, N est le nombre d'oscillateurs. La matrice $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ représente la matrice de couplage entre les différents oscillateurs, dont les éléments sont Γ_{ij} . Pour simplifier l'étude on se place dans le cas où tous les oscillateurs sont tous connectés uniformément entre eux (dans la littérature cette connexion est nommée *all-to-all*. Dans ce manuscrit, nous l'appellerons connexion *complète*), ainsi les éléments de la matrice Γ sont tous égaux : $\Gamma_{ij} = K \text{ in } \mathbb{R}, \forall i \forall j$. Le modèle s'écrit :

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) \quad (2.16)$$

ou encore sous la forme :

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + Kr(t) \sin(\psi(t) - \theta_i(t)) \quad (2.17)$$

où :

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \quad (2.18)$$

où $r(t) \in [0, 1]$ et $\psi(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la moyenne des N phases instantanées. Cette dernière équation (2.18) permet de trouver les solutions à verrouillage de phase de l'équation (2.16) dans le cas où N est fini [2]. D'autre part, r apporte également des informations sur l'état de synchronisation du système [110].

De par sa simplicité, ce modèle a été très utilisé pour comprendre les phénomènes de synchronisation des systèmes oscillants dans divers domaines, comme en chimie, en ingénierie et en biologie [111] que ce soit pour décrire des phénomènes tels que la synchronisation du chant des criquets [121], le scintillement synchronisé des lucioles [19], l'étude de la stimulation cardiaque ou encore en neurosciences pour décrire l'horloge interne des cellules du cerveau ou l'activité neuronale synchronisée [37]. Pour plus de références, se reporter à [110].

Tous les phénomènes de l'activité caractéristique des neurones ne sont pas reproduits par le modèle de Kuramoto (repos, bursts), mais ce modèle permet bien de représenter les phénomènes de synchronisation de systèmes oscillatoires interconnectés et comme le montrent les nombreux résultats de la littérature, il est très utilisé pour étudier la synchronisation de l'activité neuronale [27, 37, 110] et [69].

2.3.3.2 Synchronisation

Le modèle de Kuramoto (2.16) décrit chaque oscillateur par une équation faisant intervenir la dérivée de leur phase instantanée (fréquence instantanée) et la phase instantanée directement.

⁵traduction littérale de l'anglais : *natural frequency*

Ainsi il y a deux concepts de synchronisation : la synchronisation en phase et la synchronisation en fréquence. De plus, pour qu'il y ait synchronisation il faut que les éléments du système oscillent, c'est-à-dire que leur fréquence instantanée doit être différente de zéro :

$$\dot{\theta}_i(t) \neq 0, \forall t, \forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$$

Synchronisation en phase

Définition 2.3.1 Soit $\theta_{oj} \in \mathbb{R}, \forall j \in \{1, \dots, N\}$ et soit $\theta(t, \theta_o), t \geq 0$ la solution du modèle de Kuramoto pour les conditions initiales θ_{oj} . La solution $\theta(t, \theta_o)$ est appelée solution à verrouillage de phase si

$$\theta_i(t, \theta_o) - \theta_j(t, \theta_o) = \theta_{oi} - \theta_{oj}, \forall t \geq 0, \forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$$

Dans la littérature nous trouverons les termes : synchronisation parfaite, exacte, complète, phase verrouillée, désignant tous la synchronisation en phase.

Définition 2.3.2 Les oscillateurs définis par (2.15) sont synchronisés en phase si il existe une solution à verrouillage de phase du système et si toutes les différences de phase $\theta_i(t, \theta_o) - \theta_j(t, \theta_o)$ convergent asymptotiquement vers cette solution, c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_i(t, \theta_o) - \theta_j(t, \theta_o) = \theta_{oi} - \theta_{oj}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2.$$

Synchronisation en fréquence

Définition 2.3.3 Les oscillateurs définis par (2.15) sont à fréquence verrouillée si il existe une constante $\vartheta \in \mathbb{R}$ et si les conditions initiales $\theta_o \in \mathbb{R}^N$ sont telles que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\dot{\theta}_i(t, \theta_o) = \vartheta, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.19)$$

Définition 2.3.4 Les oscillateurs définis par (2.15) sont synchronisés en fréquence si il existe une solution à verrouillage de fréquence du système et si toutes les fréquences $\dot{\theta}_i(t)$ convergent asymptotiquement vers cette solution, c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_i = \vartheta, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.20)$$

Dans la suite nous verrons quelques résultats portant sur la synchronisation et sur l'existence des solutions, nous verrons en particulier que le gain d'interconnexion K est la pierre angulaire de la synchronisation dans le cas de la connexion complète.

2.3.3.3 Quelques résultats

Le modèle de Kuramoto fait l'objet de nombreux travaux portant sur la synchronisation, la stabilité et l'existence de solutions pour $N \geq 2$ oscillateurs couplés. Notamment dans [42] est proposée une étude récapitulative des conditions de synchronisation.

Existence de solution

Dans [2], il est montré que pour un système à N oscillateurs (2.15), dont la connexion est complète et où N est fini, il existe une solution de phase verrouillée $\theta_i^*(t)$ telle que :

$$\theta_i^*(t) = \Omega t + \theta_0$$

si et seulement si il existe $r^* \in [0, 1] : \frac{|\omega_i'|}{Kr^*} \leq 1, \forall i$, tel que

$$r^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_j - \Omega}{Kr^*} \right)^2} \quad (2.21)$$

où $\Omega = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i \in \mathbb{R}$ est la moyenne des fréquences naturelles.

Cet article propose non seulement une solution de phase $\theta_i^*(t)$ mais il montre également que si les oscillateurs sont synchronisés alors leur vitesse de synchronisation est la moyenne des fréquences naturelles Ω . Il nous reste donc à connaître les conditions de synchronisation.

Critère intuitif de synchronisation

D'après l'équation (2.18), si tous les ω_j sont égaux et si le système est synchronisé en phase (synchronisation totale, définition (2.3.2)), alors on a $r(t) = 1$. Dans [110], le paramètre r est utilisé comme critère de synchronisation mais il reste intuitif. Les simulations montrent que pour N oscillateurs, $N \rightarrow \infty$, il existe une valeur critique K_c du gain d'interconnexion K , tel que $K > K_c$ à partir de laquelle r est proche de un et à partir de laquelle le système est synchronisé. A l'inverse, pour $K \leq K_c$ on remarque que les oscillations sont totalement décorréliées les unes par rapport aux autres et que $r \simeq 0$.

La valeur du gain K a donc une grande importance dans la synchronisation du système. En effet beaucoup de résultats de simulations montrent que c'est à partir d'une valeur de K suffisamment grande que le système se synchronise à une vitesse correspondant à la moyenne des fréquences naturelles, $\forall \omega_i \neq \omega_j$. Dans le cas où N est fini, si la connexion est complète et si $\omega_i \neq \omega_j$, [27] donne une condition nécessaire de la synchronisation en phase portant sur le gain critique K_c , ainsi qu'une valeur de ce gain qui assure la synchronisation exponentielle en fréquence à la vitesse Ω .

Condition nécessaire de synchronisation en phase

Soit un système composé de N oscillateurs dont la connexion est complète. Ce système accepte une solution de phase verrouillée si $K > K_c$ avec :

$$K_c = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min}) N}{2 \sin(\theta_s) + 2(N-2) \sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right)} \quad (2.22)$$

où $\theta_s \in \mathbb{R}$ est telle que $\theta_s = 2 \cos^{-1} \left(\frac{-(N-2) - \sqrt{(N-2)^2 + 32}}{8} \right)$, où $(\omega_{max}, \omega_{min}) \in \mathbb{R}^2$ sont respectivement la fréquence naturelle maximum et la fréquence naturelle minimum du système. Pour plus de détail sur θ_s se reporter à [27]. Si $N = 2$ ou si $N \rightarrow \infty$, alors on a $K_c = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min}) N}{2(N-1)}$. Ce résultat apparait également dans [69].

Condition suffisante de synchronisation exponentielle en fréquence

Lorsque $\forall i, j, |\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_j(t)|$ décroît exponentiellement alors on dit que le système est synchronisé exponentiellement en fréquence. Dans [27], un système composé de N oscillateurs tous connectés les uns aux autres, c'est-à-dire que $K \in \mathbb{R}$ est une constante, est un système synchronisé exponentiellement en fréquence si $\exists T \geq 0$ tel que $\forall t \geq T, |\theta_i - \theta_j| < \frac{\pi}{2} - \epsilon \forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$, où $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$. Ainsi la fréquence des oscillateurs $\dot{\theta}_i(t)$ se synchronisent exponentiellement à la vitesse $\Omega = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i$ et satisfont $|\dot{\theta}_i(t) - \Omega| \leq \sigma_T e^{K \sin(\epsilon)(t-T)}$, où $\sigma_T > 0$. Pour plus de détail sur σ_T , se reporter à [27].

Condition nécessaire et suffisante de synchronisation exponentielle en fréquence

La condition sur la valeur du gain d'interconnexion K_s , tel que $K > K_s$, qui assure la synchronisation exponentielle en fréquence est définie dans [27] par l'équation suivante :

$$K_s = \frac{N(\omega_{max} - \omega_{min})}{2 \cos(\epsilon)}, 0 < \epsilon < \frac{\pi}{2} \quad (2.23)$$

où $(\omega_{max}, \omega_{min}) \in \mathbb{R}^2$ sont respectivement la fréquence naturelle maximum et la fréquence naturelle minimum du système.

Chapitre 3

Synchronisation de systèmes semi-passifs à couplage diffusif

Nous présenterons dans ce chapitre, les principales notions théoriques auxquelles les différents résultats présentés aux chapitres 4 et 5 feront appel. Comme nous le verrons par la suite, la topologie des systèmes interconnectés a une influence sur la synchronisation du réseau formé par ces systèmes. Afin d'étudier cette topologie, nous utiliserons certains outils issus de la théorie des graphes que nous présenterons dans ce chapitre. Nous définirons ensuite les différents concepts de synchronisation directement liés à notre problématique. Nous verrons ensuite les concepts de passivité et semi-passivité des systèmes ainsi que de convergence des systèmes dynamiques. Nous verrons à la fin de ce chapitre comment les propriétés des systèmes semi-passifs et convergents permettent de conclure sur l'état de synchronisation lorsque le couplage est diffusif.

3.1 Théorie des graphes pour les problèmes de synchronisation

La théorie des graphes est le concept mathématique de base utilisé pour la modélisation de réseaux. Un graphe est un ensemble de points appelés *sommets* ou *nœuds*. Les nœuds sont reliés entre eux par des *arêtes* ou des *arcs*. On appelle un graphe *orienté*, un graphe dont la connexion des nœuds se fait dans un sens défini. A l'inverse, l'arête de deux nœuds d'un graphe *non orienté* assure une connexion dans les deux sens. Une étude exhaustive sur les propriétés de la représentation matricielle des graphes non orientés est présentée dans [102]. Dans cette section, nous présentons quelques définitions et propriétés portant sur les graphes. Pour plus d'informations voir [89] et [102].

Un unique graphe G est un couple de deux ensembles qui consiste en un ensemble non vide de sommets ou de nœuds $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, où $N \in \mathbb{N}$ est le nombre de nœuds du graphe et en un ensemble d'arêtes $E(G) \subseteq V \times V$. Pour simplifier la notation, on utilise souvent e_{ij} , où $\{(i, j)\} \in \{1, \dots, N\}^2$, pour définir l'arête $(v_i, v_j) \in E(G)$. Une arête e_{ij} dans un graphe G est une arête qui commence au nœud v_i et arrive au nœud v_j . On dit que le nœud v_j est adjacent au nœud v_i . Toutes les relations d'adjacences peuvent être décrites par la matrice d'adjacence du graphe. Les éléments a_{ij} de la matrice d'adjacence $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ du graphe G sont définis par :

$$\forall (i, j) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_{ij} \in E(G) \\ 0 & \text{si } e_{ij} \notin E(G). \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous voyons clairement que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique alors que ce n'est pas le cas pour un graphe orienté quelconque.

Le *degré* $d(v_i) \in \mathbb{N}$ d'un graphe est le nombre d'arêtes du nœud v_i . Respectivement, $d^+(v_i)$ et $d^-(v_i)$ est le degré *entrant* et le degré *sortant* du nœud v_i . Ils sont définis respectivement comme le nombre d'arêtes qui partent du nœud v_i et le nombre d'arêtes qui arrivent à ce même nœud v_i tels que :

$$d^+(v_i) = \sum_{j=1}^N a_{ji}, \quad d^-(v_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}. \quad (3.2)$$

La *matrice des degrés* du graphe G est une matrice diagonale : $\mathbf{D} \in \mathbb{N}^{N \times N}$, dont les éléments $d_{ii} = d^-(v_i)$. La matrice laplacienne $\mathbf{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{Z}^{N \times N}$, associée au graphe G , est définie par :

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}, \quad (3.3)$$

avec

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^N a_{ik} & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (3.4)$$

Dans le cas des graphes non orientés, la matrice laplacienne est toujours semi-définie positive, alors que ce n'est pas forcément le cas pour les graphes orientés. De la définition de la matrice laplacienne il s'en suit que la somme de chaque ligne est nulle. Par conséquent, la matrice laplacienne a toujours une valeur propre $\lambda(\mathbf{L}) = 0$ et le vecteur propre droit correspondant est : $\mathbf{v}_d = \mathbf{1}$. De plus, étant donné que pour un graphe non orienté la matrice L est symétrique, on a : $\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_d$, où \mathbf{v}_g est le vecteur propre gauche.

Définition 3.1.1 *Un graphe orienté $G = (V, E)$ est complet si le degré de chaque nœud est égal à $N - 1$. Ce type de graphe est aussi appelé : graphe complètement connecté.*

Définition 3.1.2 *Un graphe orienté est dit à forte connexion (ou fortement connecté, strongly connected), si chaque nœud du graphe est connecté à tous les autres nœuds du graphe par un chemin qui suit la direction des arêtes du graphe.*

Notons que la multiplicité de zéro comme valeur propre de \mathbf{L} est égale au nombre de composants connectés de G . Donc pour les graphes fortement connectés, il y a toujours une seule valeur propre nulle.

Définition 3.1.3 : *Le nœud v_i du graphe $G = (V, E)$ est homogène si son degré entrant $d^+(v_i)$ et son degré sortant $d^-(v_i)$ sont égaux, c'est-à-dire que $d^+(v_i) = d^-(v_i)$. Un graphe $G = (V, E)$, est homogène si tous les nœuds qui le composent sont homogènes :*

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ji}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.5)$$

Un graphe non orienté est homogène. De plus, un graphe orienté homogène est fortement connecté [104].

Définition 3.1.4 *Un graphe pondéré est un graphe où chaque arête est affecté d'un nombre réel positif, appelé poids de cette arête.*

Théorème 3.1.1 [104] Soit $G = (V, E)$, un graphe orienté pondéré avec une matrice laplacienne \mathbf{L} . Si G est fortement connecté, alors $\text{rang}(\mathbf{L}) = N - 1$.

Proposition 1 [104] Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est fortement connecté si et seulement si, la deuxième plus petite valeur propre de la matrice laplacienne \mathbf{L} du graphe, notée $\lambda_2(\mathbf{L})$, est strictement positive.

L'importance de la deuxième plus petite valeur propre $\lambda_2(\mathbf{L}) > 0$ de la matrice laplacienne \mathbf{L} a été reconnue par Fielder [47, 48]. Il a introduit le terme de *connectivité algébrique* pour cette quantité. Les propriétés de la connectivité algébrique d'un graphe non orienté incluent le fait que ces valeurs ne peuvent pas décroître quand des arêtes non orientées sont ajoutées au graphe. Par conséquent, la connectivité algébrique est une mesure significative du niveau de la connectivité d'un graphe non orienté.

3.2 Synchronisation des systèmes : définitions et outils

Considérons un système dynamique S_i décrit par des systèmes interconnectés d'équations différentielles ordinaires $\dot{\mathbf{x}}_i$:

$$S_i : \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_P(t)), \quad i \in \{1, \dots, P\} \quad (3.6)$$

où $P \in \mathbb{N}$ est le nombre de systèmes interconnectés, $\mathbf{F}_i : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \dots \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Une définition générale du problème de synchronisation, sans précision sur les coordonnées, peut être trouvée dans [11, 13, 18].

Définition 3.2.1 Les solutions $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_P(t)$ des systèmes S_1, \dots, S_P dont les conditions initiales sont $\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_P(0) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} \dots \times \mathbb{D}$, avec $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N$, sont complètement synchronisées si

$$\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_1(t)\| \equiv 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (3.7)$$

Les solutions $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_P(t)$ des systèmes S_1, \dots, S_P sont globalement complètement synchronisées si $\mathbb{D} = \mathbb{R}^N$.

Définition 3.2.2 Les systèmes dynamiques S_1, \dots, S_P sont complètement synchronisés si pour toutes conditions initiales $\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_P(0) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} \dots \times \mathbb{D}$, avec $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N$, on a :

$$\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_1(t)\| \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

où $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$ sont les solutions des systèmes S_1, \dots, S_P .

Les systèmes S_1, \dots, S_P sont globalement complètement synchronisés si $\mathbb{D} = \mathbb{R}^N$.

Définition 3.2.3 Les systèmes dynamiques S_1, \dots, S_P sont asymptotiquement synchronisés si pour toutes conditions initiales $\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_P(0) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} \dots \times \mathbb{D}$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_1(t)\| = 0 \quad (3.8)$$

où $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_P(t)$ sont les solutions des systèmes S_1, \dots, S_P .

Les systèmes S_1, \dots, S_N sont globalement asymptotiquement synchronisés si $\mathbb{D} = \mathbb{R}^N$.

On peut voir la synchronisation asymptotique comme l'attractivité d'un ensemble diagonal \mathcal{A} tel que : $\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_P \in \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N : \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j; (i, j) \in \{1, \dots, P\}^2 \right\}$. C'est-à-dire que pour toutes conditions initiales appartenant à un ensemble ouvert proche de \mathcal{A} , les solutions des systèmes interconnectés convergent vers cet ensemble \mathcal{A} .

Définition 3.2.4 *Les systèmes dynamiques S_1, \dots, S_P sont fortement synchronisés si pour toutes conditions initiales $\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_P(0) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} \dots \times \mathbb{D}$, l'ensemble diagonal*

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_P \in \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N : \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j; (i, j) \in \{1, \dots, P\}^2 \right\}$$

est attractif et stable au sens de Lyapunov.

Définition 3.2.5 *Les systèmes dynamiques S_1, \dots, S_P sont asymptotiquement synchronisés en sortie si il existe une fonction $\mathbf{h} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, où $M \in \mathbb{N}$, telle que :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{h}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t))\| = 0 \quad (3.9)$$

pour toutes conditions initiales $\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_P(0) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} \dots \times \mathbb{D}$.

Les systèmes dynamiques S_1, \dots, S_P sont globalement asymptotiquement synchronisés en sortie si $\mathbb{D} = \mathbb{R}^N$.

Définition 3.2.6 *Les systèmes dynamiques S_1, \dots, S_P sont pratiquement synchronisés en sortie si il existe une fonction $\mathbf{h} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, où $M \in \mathbb{N}$, et $\varepsilon > 0$ telle que :*

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t))\| \leq \varepsilon \quad (3.10)$$

pour tout $t \geq 0$ et pour toutes conditions initiales $\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_N(0) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} \dots \times \mathbb{D}$.

Les systèmes dynamiques S_1, \dots, S_P sont globalement pratiquement synchronisés en sortie si $\mathbb{D} = \mathbb{R}^N$.

3.3 Synchronisation des systèmes semi-passifs

Dans cette section, nous proposons des conditions nécessaires et suffisantes pour la synchronisation d'un réseau formé par des systèmes interconnectés par couplage diffusif. Ces conditions portent sur la bornitude des solutions des systèmes interconnectés et sur la convergence de ces systèmes. La bornitude des solutions fait appel à la théorie de la passivité des systèmes dynamiques.

3.3.1 Systèmes passifs, semi-passifs et bornitude des solutions

Nous présentons dans cette section, les définitions de passivité et de semi-passivité des systèmes dynamiques. Une des propriétés intéressante de tels systèmes est la bornitude des solutions. Soit un système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)), \end{cases} \quad (3.11)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ est la variable d'état, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M$ est l'entrée, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ est la sortie du système et $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times M}$ sont suffisamment douces pour assurer l'existence de solutions uniques.

Définition 3.3.1 *Le système (3.11) est dit passif (dans \mathbb{R}^N) si il existe une fonction positive ou nulle $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ connectée et invariante sous la dynamique du système (3.11), $V(\mathbf{0}) = 0$, telle que l'inégalité de dissipativité suivante est respectée :*

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial V(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}^T} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}) \leq \mathbf{y}^T \mathbf{u}.$$

Définition 3.3.2 *Le système (3.11) est dit semi-passif (dans \mathbb{R}^N) si il existe une fonction positive ou nulle $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ connectée et invariante sous la dynamique du système (3.11), $V(\mathbf{0}) = 0$, telle que l'inégalité de dissipativité suivante est respectée :*

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial V(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}^T} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}) \leq \mathbf{y}^T \mathbf{u} - H(\mathbf{x})$$

où la fonction $H(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est positive ou nulle en dehors de la boule $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^N$ de rayon ρ

$$\exists \rho > 0, \quad H(\|\mathbf{x}\|) \geq \varrho(\|\mathbf{x}\|),$$

où ϱ est une fonction continue et $\varrho(\|\mathbf{x}\|) \geq 0$, $\forall \|\mathbf{x}\| \geq \rho$.

La fonction $V(\mathbf{x})$ est appelée fonction de stockage.

Définition 3.3.3 *Le système (3.11) est strictement semi-passif (dans \mathbb{R}^N) si la fonction $H(\cdot)$ est strictement positive en dehors de la boule $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$.*

Un système semi-passif se comporte comme un système passif pour des valeurs de $\|\mathbf{x}\|$ suffisamment grandes. Un système semi-passif en boucle fermée, ici notre système est interconnecté par la fonction $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{y})$ telle que $\mathbf{y}^T \leq 0$, a ses solutions bornées indépendamment des conditions initiales [97]. Indépendamment du choix des conditions initiales, toutes les solutions du système interconnecté entrent dans un ensemble compact (indépendant des conditions initiales) à un instant t et restent dans cet ensemble pour $t \rightarrow \infty$.

Un des intérêts dans notre cas de la semi-passivité, est qu'elle permet de trouver des conditions simples qui assurent la bornitude des solutions d'un système interconnecté par couplage diffusif. Considérons P systèmes interconnectés par la fonction $\mathbf{u}_j = -\gamma_{j1}(\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_1(t)) - \gamma_{j2}(\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_2(t)) - \dots - \gamma_{jP}(\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_P(t))$, de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{f}_j(\mathbf{x}_j(t)) + \mathbf{g}_j(\mathbf{x}_j(t)) \mathbf{u}_j \\ \mathbf{y}_j(t) = \mathbf{h}_j(\mathbf{x}_j(t)) \end{cases} \quad (3.12)$$

où $j \in \{1, \dots, P\}$.

Lemme 3.3.1 [99] *Supposons que le système (3.12) est semi-passif avec une fonction de stockage non bornée $V_j(\mathbf{x}_j(t)) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$. Alors toutes les solutions du système (3.12) en boucle fermée avec un retour*

$$\mathbf{u}_j(t) = -\gamma_{j1}(\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_1(t)) - \gamma_{j2}(\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_2(t)) - \dots - \gamma_{jP}(\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_P(t)), \quad (3.13)$$

avec $\gamma_{ji} = \gamma_{ij} \geq 0$, existent pour tout $t \geq 0$ et sont bornées. De plus, si le système (3.12) est strictement semi-passif avec une fonction de stockage non bornée semi-définie positive $V_j(\mathbf{x}_j(t)) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$, $V_j(0) = 0$, alors toutes les solutions du système (3.12) existent pour tout $t \geq 0$ et sont U-bornées (Ultimately bounded).

Dans la suite, nous présentons une définition de systèmes convergents.

3.3.2 Convergence de systèmes dynamiques

La convergence de systèmes dynamiques, que nous définissons dans cette section, permet de vérifier une des conditions pour que le réseau (formé par ces systèmes interconnectés par couplage diffusif) puisse être dans un état de synchronisation (voir section 3.3.3).

Considérons le système particulier suivant :

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{d}(t)) \quad (3.14)$$

où $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^s$, $\mathbf{d} \in \mathbb{D}$, et \mathbb{D} est un ensemble compact de \mathbb{R}^L , la fonction $\mathbf{d} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$ est supposée continue et le vecteur $\mathbf{q} : \mathbb{R}^s \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^s$ est continu localement Lipschitz en \mathbf{z} et continu en \mathbf{d} .

Définition 3.3.4 [97] *Le système (3.14) est dit convergent si*

- i) *toutes les solutions de \mathbf{z} sont définies et uniques pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour toutes conditions initiales $\mathbf{z}(0) \in \mathbb{R}^s$.*
- ii) *il existe une unique solution globalement asymptotiquement stable $\bar{\mathbf{z}}$ bornée pour tout $t \in \mathbb{R}$ telle que :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}\| = 0.$$

De plus, si toutes les conditions initiales appartiennent à une boule centrée en $\bar{\mathbf{z}}(t_0)$, si il existe une constante $c > 0$ et une constante $\alpha > 0$ indépendantes de t_0 , telle que $\|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}\| \leq ce^{-\alpha(t-t_0)}$, on dit que le système (3.14) est non-critiquement convergent (noncritically convergent).

Le théorème suivant garantit la convergence du système (3.14).

Théorème 3.3.1 [40, 99] *Supposons qu'il existe une matrice \mathbf{P} symétrique et définie positive telle que toutes les valeurs propres de la matrice symétrique*

$$\frac{1}{2} \left[\mathbf{P} \left(\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{z}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \mathbf{P} \right]$$

sont strictement négatives pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^s$ et $\mathbf{d} \in \mathbb{D}$, alors le système (3.14) est non-critiquement convergent dans la classe $\{\mathbf{d} \in C^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}\}$.

Dans la section suivante, nous verrons que les systèmes semi-passifs (définition 3.3.3) et convergents (définition 3.3.4) peuvent être dans un état de synchronisation.

3.3.3 Synchronisation pour des systèmes semi-passifs et convergent

Un réseau composé de P systèmes ayant tous le même nombre d'entrées et le même nombre de sorties et interconnectés par couplage diffusif est de la forme [99] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{f}_j(\mathbf{x}_j(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}_j \\ \mathbf{y}_j(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_j(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

où $j \in \{1, \dots, P\}$, $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^N$ est l'état du $j^{\text{ème}}$ système, $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^M$ est l'entrée du $j^{\text{ème}}$ système, $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^M$ est la sortie du $j^{\text{ème}}$ système. $\mathbf{f}(0) = 0$ et les matrices $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ et $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ sont constantes. Le $j^{\text{ème}}$ système (3.15) est interconnecté aux autres systèmes par l'équation (3.13) :

$$\mathbf{u}_j(t) = -l_{j1}(\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_1(t)) - l_{j2}(\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_2(t)) - \dots - l_{jP}(\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_P(t))$$

où $l_{ji} = l_{ij} \geq 0$ sont constantes telles que $\sum_{j \neq i}^P l_{ji} > 0$, $\forall i \in \{1, \dots, P\}$ et sont les éléments (définis à l'équation (3.4)) de la matrice laplacienne \mathbf{L} telle que

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^P a_{1i} & -a_{12} & \dots & -a_{1P} \\ -a_{21} & \sum_{i=1, i \neq 2}^P a_{2i} & \dots & -a_{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{P1} & -a_{P2} & \dots & \sum_{i=1}^{P-1} a_{Pi} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

On notera que la somme de chaque ligne de la matrice \mathbf{L} est nulle. La matrice \mathbf{L} est symétrique c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont réelles. De même la matrice \mathbf{L} est une matrice laplacienne pour un graphe non-orienté et est semi-définie positive.

Le système (3.15) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_j = \mathbf{q}(\mathbf{z}_j, \mathbf{y}_j) \\ \dot{\mathbf{y}}_j = \mathbf{a}(\mathbf{z}_j, \mathbf{y}_j) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_j \end{cases} \quad (3.17)$$

où $\mathbf{z}_j \in \mathbb{R}^{N-M}$, $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{q}(\mathbf{z}_j, \mathbf{y}_j) : \mathbb{R}^{N-M} \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{N-M}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ et $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ et $\mathbf{a}(\mathbf{z}_j, \mathbf{y}_j) : \mathbb{R}^{N-M} \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$. Soient les valeurs propres $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_P$ de la matrice \mathbf{L} . Le théorème suivant établit que les solutions du système (3.17) sont bornées quelles que soient les conditions initiales. Les conditions de ce théorème sont vérifiées si le système est semi-passif (lemme 3.3.1).

Théorème 3.3.2 [97] *Considérons le système (3.17) couplé de manière diffusive par \mathbf{u}_j (3.13). Supposons que :*

H1. Le système

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u} \end{cases}$$

est strictement semi-passif avec une fonction de stockage non bornée $V : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}_+$.

H2. Il existe une fonction \mathcal{C}^2 $V_0 : \mathbb{R}^{N-M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et il existe une constante α telle que l'inégalité suivante est respectée :

$$(\nabla V_0(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2))^T (\mathbf{q}(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}_1) - \mathbf{q}(\mathbf{z}_2, \mathbf{y}_2)) \leq -\alpha \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|^2, \quad (3.18)$$

$\forall (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in \mathbb{R}^{2(N-M)}, \mathbf{y}_1 \in \mathbb{R}^M$.

Alors, pour toute matrice \mathbf{L} (3.16) semi-définie positive, toutes les solutions du système (3.17) sont bornées indépendamment des conditions initiales et il existe $\bar{\lambda} > 0$ telle que pour toute matrice \mathbf{L} semi-définie positive dont les valeurs propres sont : $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_P$, avec $\lambda_2 > \bar{\lambda}$, il existe un sous espace compact globalement asymptotiquement stable de l'ensemble diagonal $\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^M, \mathbf{z}_j \in \mathbb{R}^{N-M} : \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_j, \mathbf{z}_i = \mathbf{z}_j, (i, j) \in \{1, \dots, P\}^2 \right\}$

Nous avons défini dans ce chapitre les principales notions théoriques, définitions et théorèmes, qui nous permettront aux chapitres 4 et 5 d'analyser et de conclure sur la synchronisation de réseaux neuronaux constitués de systèmes dynamiques interconnectés par couplage diffusif. Si les systèmes composant le réseau vérifient le théorème 3.3.2 alors ils présentent les propriétés permettant au réseau d'être synchronisé. D'autre part, la théorie des graphes permet d'étudier l'impact de la topologie du réseau sur sa synchronisation.

Chapitre 4

Du modèle de Kuramoto au modèle linéaire : projection asymptotique et propriétés de stabilité de ces deux systèmes

Le problème posé par la synchronisation d'oscillateurs couplés a attiré de nombreux scientifiques de divers domaines, physique, biologie, les neurosciences et les mathématiques par exemple. Dans ce chapitre, nous nous baserons sur le modèle de Kuramoto qui est un des systèmes les plus simples utilisé pour modéliser un réseau de neurones et nous utiliserons une connexion complète (*all-to-all*). Nous construirons un système linéaire qui conserve les informations sur les fréquences naturelles et sur les gains d'interconnexion du modèle original de Kuramoto. Les propriétés de stabilité de ces modèles seront ensuite analysées.

4.1 Une reformulation linéaire du modèle de Kuramoto et ses propriétés

Dans ce chapitre nous considérons les réseaux d'oscillateurs couplés complètement (*all-to-all*). Comme nous l'avons présenté au chapitre 2, en plus de diverses applications en physique, biologie et chimie, ces systèmes relativement simples mais toujours représentatifs des réseaux neuronaux, sont bien adaptés pour l'analyse de la synchronisation neuronale. Un modèle couramment utilisé pour modéliser un réseau de N oscillateurs complètement (*all-to-all*) couplés est le modèle de Kuramoto [76] :

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)), \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.1)$$

où $\dot{\theta}_i(t) \in \mathbb{R}$ est la fréquence instantanée, $\theta_i(t) \in \mathbb{R}$ est la phase instantanée, $\omega_i \in \mathbb{R}$ est la fréquence naturelle, $N \in \mathbb{N}$ est le nombre d'oscillateurs et le paramètre $K > 0$ est le coefficient de couplage ou encore appelé gain d'interconnexion.

En suivant l'idée proposée dans [101], nous remarquons qu'un modèle possédant les mêmes propriétés asymptotiques que le modèle de Kuramoto (4.1) peut être réduit à ce même modèle

(4.1). Dans [101], les auteurs introduisent tout d'abord le système linéaire à variables complexes suivant

$$\dot{x}_i = (i\omega_i - \zeta)x_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N x_j, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.2)$$

où $N \in \mathbb{N}$ est le nombre d'oscillateurs couplés, $x_i \in \mathbb{C}$ et $\zeta \in \mathbb{R}$. Par la suite, en introduisant la transformation en coordonnées polaires : $x_i(t) = R_i(t)e^{i\theta_i(t)}$, $R_i(t) \in \mathbb{R}$ et $\theta_i(t) \in \mathbb{R}$, dans [101] l'auteur obtient :

$$\dot{R}_i e^{i\theta_i} + iR_i e^{i\theta_i} \dot{\theta}_i = (i\omega_i - \zeta)R_i e^{i\theta_i} + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N R_j e^{i\theta_j}. \quad (4.3)$$

En supposant implicitement que $R_i(t)$ n'est jamais égale à zéro et en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient les équations suivantes [101] :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}_i}{R_i} &= -\zeta + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \frac{R_j}{R_i} \cos(\theta_j - \theta_i) \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \frac{R_j}{R_i} \sin(\theta_j - \theta_i) \end{aligned}$$

Dans [101] l'auteur choisit ζ telle que $R_i(t)$ tend vers un état asymptotiquement stable quel que soit i , c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow \infty} R_i(t) = \text{const}$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{N} \frac{R_j(t)}{R_i(t)} = K_{ji}$. Alors on a

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (4.4)$$

Le résultat de la projection du système linéaire (4.2) pour un couplage identique sur un espace réduit \mathbb{R}^N donne le modèle de Kuramoto (4.1), où le coefficient de couplage n'est pas égal pour chaque neurone.

Dans ce chapitre, notre objectif est d'établir un système linéaire qui, asymptotiquement, garderait la même matrice d'interconnexion. Pour cela, on introduit un degré supérieur de flexibilité dans le système linéaire. Au lieu de l'équation (4.2) où le terme ζx_i est ajouté pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, où ζ est le même pour tout i , ici, on permet aux coefficients de prendre différentes valeurs pour différents i . Ainsi, on considère le système

$$\dot{x}_i = i\omega_i - \mu_i x_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N x_j, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.5)$$

où $\mu_i \in \mathbb{R}$. On peut également mettre l'équation (4.5) sous la forme matricielle¹ suivante

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{K}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T + i\mathbf{\Omega} - \mathbf{M} \right) \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (4.6)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $\mathbf{M} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

¹on choisi le signe moins devant la matrice \mathbf{M} pour établir, par la suite, des liens d'existence plus clairs entre la matrice et les expressions des solutions à verrouillage de phase du modèle de Kuramoto.

Notre objectif est de trouver une matrice \mathbf{M} pour que les solutions asymptotiques $x_i(t)$ du système (4.5) convergent vers le même cycle limite, ce qui nous donnerait dans un état stable $\lim_{t \rightarrow \infty} R_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} R_j(t)$ quels que soient $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$.

Étant donné que tous les oscillateurs θ_i , $i \in \{1, \dots, N\}$, ont le même comportement asymptotique, c'est-à-dire qu'ils ont la même vitesse de rotation $\omega_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i$ (qui est égale la moyenne des fréquences naturelles ω_i des oscillateurs interconnectés), on cherche tout d'abord le vecteur $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_N]^T$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$, tel que la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ définie par l'équation (4.6), a une valeur propre $\lambda_1 = i\omega_m$ à laquelle est associée un vecteur propre $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^N$ qui est de la forme $\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_N}]^T$, $\phi_j \in [0, 2\pi]$ et $j \in \{1, \dots, N\}$, alors

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = i\omega_m \mathbf{v}_1. \quad (4.7)$$

Dans un premier temps, nous introduisons une hypothèse sur les fréquences naturelles ω_i et sur le gain d'interconnexion K .

Hypothèse 1 *Il existe une valeur $r_\infty \in]0, 1]$ telle que*²

$$r_\infty = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\omega}_i}{Kr_\infty} \right)^2} \quad (4.8)$$

où $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega_m$ et $-1 \leq \frac{\tilde{\omega}_i}{Kr_\infty} \leq 1$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$.

Remarque 1 Dans la littérature sur les systèmes de Kuramoto, l'expression (4.8) est connue comme étant la *condition de consistance* (*consistency condition*) sur r_∞ des solutions à verrouillage de phase. Elle est introduite dans [76]³ et dans [2], où il est montré que l'hypothèse 1 est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions à verrouillage de phase.

Le théorème suivant montre que si l'hypothèse 1 est satisfaite alors il existe une famille de matrices qui possèdent les caractéristiques décrites par l'équation (4.7).

Théorème 1 *Soit le vecteur $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^N$ et soit la constante $K > 0$. Supposons que l'hypothèse 1 est satisfaite, alors la matrice \mathbf{A} définie par (4.6) a une valeur propre imaginaire $\lambda_1 = i\omega_m$, où ω_m est une vitesse de rotation égale à la moyenne des fréquences naturelles et le vecteur propre associé est $\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_N}]^T$ si et seulement si la matrice diagonale $\mathbf{M} = \text{diag}(\boldsymbol{\mu})$ a ses éléments $\mu_i = \pm \sqrt{(Kr_\infty)^2 - (\tilde{\omega}_i)^2}$ quel que soit $i \in \{1, \dots, N\}$, où les signes \pm sont les mêmes que les signes \pm de l'équation (4.8) pour r_∞ . De plus les éléments v_{1j} du vecteur propre \mathbf{v}_1 sont définis par*

$$v_{1j} = e^{i\phi_j} = \frac{1}{Kr_\infty} (\mu_j + i\tilde{\omega}_j), \quad j \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.9)$$

Preuve.

- *Condition suffisante.*

Pour que le vecteur $\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_N}]^T$, avec $N \in \mathbb{N}$, soit un vecteur propre de la matrice \mathbf{A} correspondant à la valeur propre $\lambda_1(\mathbf{A}) = i\omega_m$ alors

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \frac{K}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \mathbf{v}_1 - (\mathbf{M} - i\boldsymbol{\Omega})\mathbf{v}_1 = \frac{K}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \mathbf{v}_1 - \text{diag}(\boldsymbol{\mu} - i\tilde{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{v}_1 + i\omega_m \mathbf{v}_1 = i\omega_m \mathbf{v}_1, \quad (4.10)$$

²le signe \pm indique que chaque terme de la somme peut être de signe plus ou de signe moins et donc l'équation (4.8) représente un ensemble d'équations.

³dans cette référence, comme dans [110], la condition (4.8) est formulée uniquement avec le signe positif.

où $\tilde{\omega} = [\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_N]^T$, $\tilde{\omega}_j = \omega_j - \omega_m$ quel que soit $j \in \{1, \dots, N\}$ et $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_N]^T$, μ_j étant définie plus haut. À partir de l'équation (4.10), nous voyons que le vecteur \mathbf{v}_1 doit satisfaire l'équation

$$\frac{K}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{v}_1 = \text{diag}(\boldsymbol{\mu} - i\tilde{\omega}) \mathbf{v}_1 = \text{diag}(\boldsymbol{\nu}) \mathbf{v}_1, \quad (4.11)$$

où le vecteur $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{C}^N$ et $\nu_j = \mu_j - i\tilde{\omega}_j$.

Ensuite nous introduisons

$$\gamma = \mathbf{1}^T \mathbf{v}_1 = \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j}. \quad (4.12)$$

Pour les matrices réelles, tout vecteur $\alpha \mathbf{v}$, où \mathbf{v} est un vecteur propre et $\alpha \in \mathbb{R}$, est aussi un vecteur propre. Nous avons la même propriété pour les matrices complexes. C'est-à-dire que tout vecteur $\eta \mathbf{v}$ multiple d'un vecteur propre \mathbf{v} , où $\eta \in \mathbb{C}$, est aussi un vecteur propre. Soit $\gamma = \gamma_o e^{i\psi}$, $\gamma_o \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}$, alors le vecteur $\mathbf{v}_a = \gamma_o \mathbf{v} e^{-i\psi}$ est aussi un vecteur propre de la matrice \mathbf{A} et pour ce vecteur nous avons $\mathbf{1}^T \mathbf{v}_a = \mathbf{1}^T \mathbf{v} e^{i\psi} = \gamma_o$. Donc, on peut supposer sans perte de généralité que $\gamma = \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} = \sum_{j=1}^N \cos(\phi_j) \in \mathbb{R}$.

En utilisant cette notation nous avons $\frac{K}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{v}_1 = \frac{K}{N} \gamma \mathbf{1}$. Ainsi l'équation (4.11) peut se réécrire comme

$$\frac{K}{N} \gamma \mathbf{1} = \text{diag}(\boldsymbol{\nu}) \mathbf{v}_1. \quad (4.13)$$

Puisque nous avons montré que $\gamma \in \mathbb{R}$ alors les éléments de $\boldsymbol{\nu}$ sont de la forme

$$\nu_j = \gamma \frac{K}{N} \bar{v}_{1j} = \gamma \frac{K}{N} e^{-i\phi_j}, \quad (4.14)$$

où \bar{v}_{1j} est le conjugué de v_{1j} . Rappelons que $\nu_j = \mu_j - i\tilde{\omega}_j$ ce qui nous donne

$$\mu_j - i\tilde{\omega}_j = \gamma \frac{K}{N} e^{-i\phi_j} = \gamma \frac{K}{N} (\cos(\phi_j) - i \sin(\phi_j)) \quad (4.15)$$

et donc

$$\sin(\phi_j) = \frac{N}{K\gamma} \tilde{\omega}_j \quad (4.16)$$

$$\cos(\phi_j) = \frac{N}{K\gamma} \mu_j = \pm \sqrt{1 - \frac{N^2}{(K\gamma)^2} \tilde{\omega}_j^2}. \quad (4.17)$$

Du fait que $\gamma \in \mathbb{R}$ et à partir des équations (4.17) et (4.12), il s'en suit que

$$\gamma = \sum_{j=1}^N \cos(\phi_j) = \sum_{j=1}^N \pm \sqrt{1 - \frac{N^2}{(K\gamma)^2} \tilde{\omega}_j^2}. \quad (4.18)$$

Ainsi, on obtient une équation qui définit une valeur de γ pour chaque combinaison de signes \pm vérifiant l'équation (4.18). Finalement, en comparant la définition de r_∞ par l'équation (4.8) et la définition de γ par l'équation (4.18), on voit que $\gamma = Nr_\infty$. Par conséquent, nous avons montré que sous l'hypothèse **H1** la matrice \mathbf{A} a une valeur propre imaginaire $i\omega_m$ (ω_m est la vitesse de rotation des oscillateurs qui est égale à la moyenne des fréquences naturelles). En utilisant la relation $\gamma = Nr_\infty$, on obtient à partir de l'équation (4.17), l'expression des éléments μ_j , $j \in \{1, \dots, N\}$ de la matrice \mathbf{M} , qui est la suivante

$$\mu_j = \pm \frac{K\gamma}{N} \sqrt{1 - \frac{N^2}{(K\gamma)^2} \tilde{\omega}_j^2} = \pm Kr_\infty \sqrt{1 - \frac{1}{(Kr_\infty)^2} \tilde{\omega}_j^2} = \pm \sqrt{(Kr_\infty)^2 - \tilde{\omega}_j^2}.$$

Notons qu'au début nous avons uniquement imposé la forme particulière des éléments du vecteurs \mathbf{v}_1 mais pas l'expression exacte. Les équations (4.16) et (4.17) donnent une représentation exacte du vecteur \mathbf{v}_1 .

- *Condition nécessaire.*

Pour prouver la condition nécessaire il faut montrer que \mathbf{v}_1 , défini par l'équation (4.9), est un vecteur propre de la matrice \mathbf{A} définie par l'équation (4.10) avec les coefficients μ_i définis par le théorème 1 et de montrer que la valeur propre correspondante est $i\omega_m$. On note $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_N]^T$ et $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = [\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_N]^T$ et on note $\bar{\mathbf{v}}_1$ le conjugué du vecteur propre \mathbf{v}_1 . Les calculs montrent que c'est effectivement le cas

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 &= \frac{K}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{v}_1 - \text{diag}(\boldsymbol{\mu} - i\tilde{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{v}_1 + i\omega_m\mathbf{v}_1 \\ &= Kr_\infty\mathbf{1} - Kr_\infty\text{diag}(\bar{\mathbf{v}}_1)\mathbf{v}_1 + i\omega_m\mathbf{v}_1 = i\omega_m\mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

et le théorème est prouvé. \square

Remarque 2 Comme nous l'avons remarqué, l'ensemble de toutes les matrices \mathbf{A} possibles peut être obtenu en résolvant 2^N équations (4.8). Dans [2] certaines de ces équations ne donnent pas de solution r_∞ pour toute valeur de K , d'autres peuvent avoir plusieurs solutions pour certaines valeurs de K . Donc, le nombre de matrices M ne correspond pas forcément au nombre d'équations. Cependant, le nombre de matrices correspond au nombre de solutions à verrouillage de phase du modèle de Kuramoto.

Afin de simplifier les notations on notera $\mathbf{A}_{K\omega}$ l'ensemble des matrices possibles résultant de l'équation (4.8) où $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur des fréquences naturelles.

Discussion. En comparant le théorème 1 et le théorème 1 dans [2], on voit que l'expression du vecteur propre \mathbf{v}_1 du théorème 1 correspond à l'expression de la solution à verrouillage de phase dans [2], voir par exemple l'équation (2.19) de l'article.

D'autre part, on remarque qu'à partir des équations (4.10) et (4.15) il est facile de voir que l'on peut réécrire la matrice \mathbf{A} comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{K}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T - \text{diag}(\boldsymbol{\mu} - i\tilde{\boldsymbol{\omega}}) + i\omega_m\mathbf{I}_N \\ &= \frac{K}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T - Kr_\infty\text{diag}(\bar{\mathbf{v}}_1) + i\omega_m\mathbf{I}_N = \frac{K}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T - Kr_\infty\bar{\boldsymbol{\Phi}} + i\omega_m\mathbf{I}_N, \end{aligned} \quad (4.19)$$

où on définit $\boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(\mathbf{v}_1)$ et son conjugué $\bar{\boldsymbol{\Phi}} = \text{diag}(\bar{\mathbf{v}}_1)$. Dans ce qui suit nous utiliserons cette représentation de la matrice \mathbf{A} pour simplifier nos calculs.

Finalement comme résultat du théorème 1, nous obtenons une famille de matrices $\mathbf{A}_{K\omega}$ qui satisfait nos exigences. De plus, l'ensemble des vecteurs propres \mathbf{v}_1 obtenu suivant le choix des signes \pm de r_∞ correspond à l'ensemble des points d'équilibre du modèle de Kuramoto donné dans [2, 109, 120].

4.2 Propriétés intrinsèques des systèmes linéaires définis par l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_{K\omega}$

Dans la section précédente nous avons obtenu une famille finie de matrices $\mathbf{A}_{K\omega}$. Chacune d'entre elles a une valeur propre imaginaire $\lambda_1 = i\omega_m$ dont le vecteur propre associé est de la

forme $\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_N}]^T$. Maintenant, considérons l'ensemble des systèmes linéaires suivant, correspondant à la famille $\mathbf{A}_{K\omega}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + i\omega_m\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \in \mathbf{A}_{K\omega} \quad (4.20)$$

où, pour plus de simplicité pour les calculs, nous séparons la matrice \mathbf{A} en deux parties avec $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{C}^{N \times N}$ telle que

$$\mathbf{A}_1 = \frac{K}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T - Kr_\infty \overline{\Phi}. \quad (4.21)$$

Nous commencerons par l'analyse de l'équilibre du système. Manifestement l'origine $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un point d'équilibre pour tout système (4.20). Cependant, il n'est pas évident que ce point soit un point d'équilibre unique ou non. Le lemme qui suit montre que tout point d'un système possédant plusieurs points d'équilibre qui respecte l'égalité donnée par le lemme, est un point d'équilibre.

Lemme 1 *Considérons le système (4.20), où $\overline{\Phi} = \text{diag}(\overline{\mathbf{v}}_1)$ où $\overline{\mathbf{v}}_1$ est le conjugué de \mathbf{v}_1 défini par le choix des signes de l'équation (4.8). Le point $\mathbf{x}_e \in \mathbb{C}^N$ est un point d'équilibre du système (4.20) si il satisfait l'égalité*

$$\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}_e = 0 \quad (4.22)$$

Preuve. Soit $\mathbf{x}_e \in \mathbb{C}^N$ un point d'équilibre du système (4.20), alors nous avons $\mathbf{A}\mathbf{x}_e = 0$, ou de manière équivalente $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_e = -i\omega_m\mathbf{x}_e$. En multipliant chaque côté de cette égalité par $\mathbf{1}^T \Phi$ on obtient

$$\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_e = -i\omega_m \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}_e \quad (4.23)$$

ou encore

$$\mathbf{1}^T \Phi \left(\frac{K}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T - Kr_\infty \overline{\Phi} \right) \mathbf{x}_e = -i\omega_m \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}_e. \quad (4.24)$$

De la définition de $\Phi = \text{diag}(\mathbf{v}_1)$ et à partir de la propriété $\mathbf{1}^T \mathbf{v}_1 = Nr_\infty$, prouvée par le théorème 1, on obtient

$$\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{1} = Nr_\infty \quad (4.25)$$

et donc $\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{A}_1 = 0$. Alors, de l'égalité (4.24) nous avons $\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}_e = 0$ et nous montrons bien que le point $\mathbf{x}_e \in \mathbb{C}^N$ du système (4.20), satisfait l'égalité (4.23). Le lemme 1 est prouvé.

□

Il est bien connu que dans un repère en rotation à la vitesse ω_m , les solutions du modèle de Kuramoto (4.1), où le vecteur $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur des conditions initiales de $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_N]$, appartiennent à un ensemble invariant. Pour tout $t \geq 0$ l'ensemble invariant est défini par l'égalité $\sum_{j=1}^N \theta_j(t, \boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{j=1}^N \theta_{0j}$ (ou par $\mathbf{1}^T \boldsymbol{\theta}(t, \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\theta}_0$, en notation vectorielle). Pour le système (4.20) l'ensemble n'est pas invariant. Cependant, nous montrerons qu'il existe un ensemble invariant pour ce système.

La notion de *paramètre d'ordre de phase complexe* (complex phase order parameter)

$$re^{i\psi} \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (4.26)$$

joue un rôle important pour l'analyse du modèle de Kuramoto [2, 110]. En particulier, il a été prouvé que pour une valeur suffisamment grande de K les solutions du système tendent vers un état où la valeur du paramètre r est soit inférieure à un (verrouillage de phase ou synchronisation

partielle), soit égale à un (synchronisation complète). Par analogie, nous introduirons pour notre système linéaire complexe la notion de *paramètre d'ordre pondéré complexe* (complex weighted order parameter)⁴

Définition 4.2.1 Soit $\mathbf{A} \in \mathbf{A}_{K\omega}$ et soit $\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_N}]^T$ le vecteur propre correspondant. Le paramètre d'ordre pondéré $z \in \mathbb{C}$ du système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ est défini par

$$z = cRe^{i\psi} = c \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} x_j = c \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}, \quad (4.27)$$

où $\Phi = \text{diag}(\mathbf{v}_1)$ et $c = (\mathbf{1}^T \Phi^2 \mathbf{1})^{-1} \in \mathbb{C}$.

Le paramètre d'ordre pondéré introduit ci-dessus diffère non seulement du paramètre d'ordre de phase complexe $re^{i\psi}$ (équation (4.26) utilisé dans [101]) pour l'analyse de la reformulation du modèle linéaire mais également du *paramètre d'ordre de l'amplitude* (amplitude order parameter)

$$\rho \equiv \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N x_j \right| \quad (4.28)$$

utilisé dans [84, 85, 109] pour étudier les modèles non linéaires avec une non linéarité cubique qui correspondent au modèle de Kuramoto.

Comme pour l'amplitude r du paramètre d'ordre de phase complexe du modèle de Kuramoto, pour les systèmes avec une non linéarité cubique le paramètre d'ordre d'amplitude ρ défini par l'équation (4.28) est également borné par un. Dans notre cas soulignons que tous les paramètres d'ordre mentionnés ci-dessus sont bornés par un comme dans [101].

Maintenant, nous montrons que l'amplitude R du paramètre d'ordre pondéré z semble être invariant pour tous systèmes (4.20) définis par les matrices de l'ensemble $\mathbf{A}_{K\omega}$.

Proposition 2 Considérons le système linéaire décrit par $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, où $\mathbf{A} \in \mathbf{A}_{K\omega}$ et soit $\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_N}]^T$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda(\mathbf{A}) = i\omega_m$. Alors, le paramètre d'ordre pondéré $z = c \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}$ est une fonction périodique dans le temps, de période ω_m : $z(t, z_0) = z_0 e^{i\omega_m t}$. C'est-à-dire que l'amplitude $R(t, \mathbf{x}_0) = R_0$ et la phase $\psi(t, \mathbf{x}_0) = \psi_0 + \omega_m t$, où R_0 et ψ_0 sont l'amplitude et la phase de $z_0 = z(0) = c \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}_0$, uniquement défini par le vecteur propre \mathbf{v}_1 et par les conditions initiales \mathbf{x}_0 .

Preuve. A la section 4.1 nous avons montré que la matrice \mathbf{A} (voir l'équation (4.19)) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{A} = \frac{K}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T - Kr_\infty \bar{\Phi} + i\omega_m \mathbf{I}_N,$$

où $\bar{\Phi} = \text{diag}(\bar{\mathbf{v}}_1)$.

Le paramètre d'ordre pondéré z est défini par (5.63), c'est-à-dire par $z = c \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}$, par conséquent $z_0 = c \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}_0 = R_0 e^{i\psi_0}$.

⁴Nous utiliserons par la suite, le terme *paramètre d'ordre pondéré* pour désigner le paramètre d'ordre pondéré complexe.

En dérivant z le long des trajectoires du système on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \mathbf{1}^T \Phi \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{1}^T \Phi \left(\frac{K}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T - K r_\infty \bar{\Phi} + i \omega_m \mathbf{I}_N \right) \mathbf{x} \\
&= \frac{K}{N} \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{x} - K r_\infty \mathbf{1}^T \mathbf{x} + i \omega_m \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x} \\
&= i \omega_m \mathbf{1}^T \mathbf{x} = i \omega_m z,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

où nous avons utilisé à la seconde ligne la définition de z et la propriété $\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{1} = \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} = N r_\infty$ qui annulent les deux termes de la somme.

Le système (4.29) avec les conditions initiales $z_0 = c \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}_0$, est un système linéaire invariant dans le temps dont les solutions sont de la forme

$$z(t, z_0) = z_0 e^{i \omega_m t} = R_0 e^{i \psi_0} e^{i \omega_m t} = R_0 e^{i \psi_0 + i \omega_m t}. \tag{4.30}$$

Nous pouvons conclure que $|z(t, z_0)| = z_0 = |c \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}_0|$ et que l'amplitude R du paramètre d'ordre pondéré est constante.

D'un autre côté, à partir de cette même équation (4.30) nous pouvons voir que la phase ψ est une fonction linéaire dans le temps : $\psi(t, z_0) = \psi_0 + \gamma \omega_m t$.

□

Remarque 3 Nous voyons que l'amplitude r du paramètre d'ordre de phase complexe du modèle de Kuramoto converge asymptotiquement vers ses valeurs limites (uniquement définies par l'équilibre ξ). L'amplitude R du paramètre d'ordre pondéré du système linéaire quand à elle est constante et est uniquement définie par le vecteur propre \mathbf{v}_1 et les conditions initiales du système. En revanche, il est facile de voir que la quantité $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$ qui est en un sens analogue à la quantité $\mathbf{1}^T \boldsymbol{\theta}$ pour le modèle de Kuramoto, converge asymptotiquement vers ses états stables tant que $\mathbf{1}^T \boldsymbol{\theta}$ est constant (en coordonnées polaires).

Puisque le paramètre d'ordre pondéré est une fonction périodique dans le temps et que son amplitude est constante alors les solutions du système (4.20) convergent asymptotiquement vers un point d'équilibre uniquement pour un ensemble de conditions initiales de mesure zéro.

En effet, supposons que les conditions initiales \mathbf{x}_0 sont telles que ⁵ $\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x} = \Delta \neq 0$ et que la solution correspondante $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ converge vers un point d'équilibre \mathbf{x}^* . Par définition cette convergence implique que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T(\epsilon) > 0$ telle que $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| \leq \epsilon$ pour tout $t \geq T(\epsilon)$. Ceci est vrai en particulier pour $\epsilon = \Delta/(2N)$. Nous avons donc

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\Delta}{2N} \quad \forall t \geq T(\Delta/(2N)).$$

Alors nous avons pour tout $t \geq T(\Delta/2N)$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| &= \|\mathbf{1}^T \Phi (\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*) + \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{1}^T \Phi (\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*)\| + \|\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}^*\| \\
&\leq \|\mathbf{1}^T \Phi\| \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{v}_1\| \Delta / 2N \leq \Delta / 2.
\end{aligned}$$

Toutefois, de la proposition 2, nous avons pour tout $t \geq 0$, $\|\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}_0\| = \Delta$. Il s'agit donc d'une contradiction qui montre que les solutions du système (4.20) ne convergent pas vers un point d'équilibre quelles que soient les condition initiales \mathbf{x}_0 telles que $\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}^* \neq 0$. C'est

⁵Au lemme 1 nous avons montré que $\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x} = 0$ est une condition nécessaire pour qu'un point du système soit un équilibre.

pourquoi, plutôt que d'analyser les propriétés de stabilité des points d'équilibre, nous allons dans la suite, analyser les propriétés de stabilité des cycles limites définis par le paramètre d'ordre pondéré z . En particulier, nous verrons que parmi tous les systèmes (4.20), dont les matrices appartiennent à l'ensemble $\mathbf{A}_{K\omega}$, il n'y a qu'un seul système pour lequel le cycle limite est stable tandis que pour les autres systèmes le cycle limite est instable.

4.3 Remarques sur l'analyse de la stabilité des systèmes à variables complexes

Jusque là nous avons étudié dans ce chapitre le cas des systèmes linéaires à variables complexes. Ce choix est essentiellement motivé par notre objectif et par l'approche choisie (à partir de [101]). Mais nous avons vu également que cette approche autorise une représentation matricielle simple et dont l'interprétation est relativement évidente concernant les notions telles que le paramètre d'ordre pondéré introduit à la définition (4.2.1).

Cependant, la structure des systèmes linéaires à variables complexes n'est pas commode lorsqu'on souhaite analyser la stabilité en utilisant les notions connues à ce sujet. De plus les résultats sont essentiellement formulés pour les systèmes linéaires à variables réelles [59, 72, 95]. Il est clair que les notions et définitions de stabilité des systèmes linéaires à variables réelles peuvent être adaptées au cas des systèmes linéaires à variables complexes. Par exemple, pour un système linéaire à variables complexes $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ défini par l'équation

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad (4.31)$$

où $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, nous pouvons définir la stabilité d'un point d'équilibre $\mathbf{z} = 0$ par la même démarche utilisée pour définir la stabilité d'un point d'équilibre des systèmes linéaires à variables réelles (voir par exemple [73], Définition (3.1) ou encore [95] chapitre 1, p.9) :

Définition 4.3.1 *Le point d'équilibre $z = 0$ du système (4.31) est stable si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\epsilon)$ telle que*

$$\|\mathbf{z}(0)\| \leq \delta \implies \|\mathbf{z}(t, \mathbf{z}(0))\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Cependant, pour éviter toute complication liée à la nécessité de reformuler les résultats existants sur les systèmes linéaires à variables réelles, nous avons choisi une autre approche. Nous commencerons par un fait bien connu qui stipule que des systèmes décrits par (4.31) peuvent se réécrire comme des systèmes à variables réelles $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$.

Pour un vecteur complexe $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + i\mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^N$ on introduit le vecteur $\mathbf{y} = [\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}$ et on décompose la matrice \mathbf{A} en partie réelle et en partie imaginaire : $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2$ avec $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Le système (4.31) peut alors se réécrire sous la forme suivante

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_r \mathbf{y}, \quad \mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{A}) & -\text{Im}(\mathbf{A}) \\ \text{Im}(\mathbf{A}) & \text{Re}(\mathbf{A}) \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Pour les vecteurs \mathbf{z} et \mathbf{y} nous avons la propriété $\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2$. De cette propriété les définitions de la stabilité sont reformulées en utilisant les normes des états des systèmes. On voit que les propriétés de stabilité des systèmes décrits par l'équation (4.31) sont

les mêmes que celles pour les systèmes décrits par l'équation (4.32). En effet, supposons par exemple que l'origine $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2N}$) est asymptotiquement stable pour le système (4.32), de manière équivalente l'origine $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$) est asymptotiquement stable pour le système (4.31).

De là, il y a donc une totale équivalence entre ces deux types de systèmes. Dans la suite, nous utiliserons ce qui est le plus pratique suivant le contexte. Quand nous nous référerons aux propriétés de stabilité des systèmes complexes il faudra comprendre que ce sont les propriétés analogues à celles des systèmes à variables réelles.

En effet, en décomposant d'après (4.32) la matrice complexe en partie réelle et en partie imaginaire, nous obtenons la dérivée de la fonction de stockage $V = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{y}$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{A}_2\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{A}_2^T\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{A}) & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}_1^T \operatorname{Re}(\mathbf{A}) \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2^T \operatorname{Re}(\mathbf{A}) \mathbf{y}_2\end{aligned}\tag{4.33}$$

$$\tag{4.34}$$

Et donc la matrice $\operatorname{Re}(\mathbf{A})$ tient un rôle crucial pour l'analyse de la stabilité de tels systèmes.

4.4 Analyse de la stabilité des systèmes linéaires définis par l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_{K\omega}$

Ici nous analyserons les propriétés d'un ensemble de systèmes linéaires (4.20) et nous montrerons qu'il y a un lien fort entre les propriétés de stabilité des systèmes linéaires et celles des points d'équilibre du modèle de Kuramoto.

Tout d'abord notons que tout comme le modèle de Kuramoto, qui est invariant sous la transformation $\theta_j \rightarrow \theta_j + \alpha$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, les systèmes linéaires décrits par l'équation (4.20) sont également invariants lorsqu'on effectue la transformation $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \alpha \mathbf{v}_1 e^{i\omega_m t}$. En effet, soit $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{v}_1 e^{i\omega_m t}$ alors pour \mathbf{x}' nous avons

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{A}\mathbf{x}' + i\omega_m \alpha e^{i\omega_m t} \mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + i\omega_m \mathbf{x} + i\omega_m \alpha e^{i\omega_m t} \mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + i\omega_m \mathbf{x}' = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}' + i\omega_m \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}',\end{aligned}$$

où nous utilisons à nouveau à la dernière ligne la propriété $\mathbf{A}_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

A partir de cette observation ainsi qu'à partir de la proposition 2 et du fait que les points d'équilibre ne sont pas attractifs pour les systèmes définis par l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_{K\omega}$, on peut avoir une idée d'une approche similaire à celle utilisée pour l'analyse du consensus des réseaux de systèmes linéaires [104].

Dans le cas des systèmes linéaires $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{x}$, où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ et \mathbf{L} est une matrice laplacienne symétrique ⁶ $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$, la valeur du consensus c'est à dire la quantité $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$ est invariante. Ce qui nous donne $\mathbf{1}^T \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{1}^T \mathbf{x}_0$ (voir par exemple [104]). Afin de prouver la stabilité asymptotique du consensus, le système est souvent projeté dans le sous-espace orthogonal de vecteur propre $\mathbf{1}$ par l'introduction du *biais vectoriel* (*group disagreement vector*)⁷

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x} - \operatorname{Ave}(\mathbf{x})\mathbf{1},\tag{4.35}$$

⁶Pour certains systèmes, $\mathbf{v} = \mathbf{1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda(\mathbf{L}) = 0 : \mathbf{L}\mathbf{1} = \mathbf{0}$.

⁷Terminologie utilisée dans [104]

où $\text{Ave}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i = \frac{1}{N} \mathbf{1}^T \mathbf{x}$. L'analyse de la stabilité est ensuite donnée en terme de $\delta \in \mathbb{C}^N$.

En suivant cette idée nous projetons les dynamiques du système (4.20) dans l'espace orthogonal de vecteur propre \mathbf{v}_1 et de même qu'à l'équation (4.35) nous introduisons le biais vectoriel $\delta \in \mathbb{C}^N$ de la manière suivante

$$\delta = \mathbf{x} - z(\mathbf{x})\mathbf{v}_1,$$

où $z = c\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}$ est le paramètre d'ordre pondéré complexe qui, pour notre système, joue un rôle similaire à $\text{Ave}(\mathbf{x})$ pour le consensus de systèmes en réseau. Ce qui définit que le vecteur δ est orthogonal au vecteur \mathbf{v}_1 .

Rappelons que $z = c\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x}$ avec $c = (\mathbf{1}^T \Phi^2 \mathbf{1})^{-1}$ et $\Phi = \text{diag}(\mathbf{v}_1)$. Nous pouvons donc écrire le biais vectoriel δ sous la forme

$$\delta = \mathbf{x} - z(\mathbf{x})\Phi \mathbf{1} = \mathbf{x} - c\Phi \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{x} = (\mathbf{I} - c\Phi \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi) \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad (4.36)$$

où $\mathbf{P} = \mathbf{I} - c\Phi \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi$.

Pour obtenir la dynamique de δ on note tout d'abord que

$$\dot{\delta} = \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + i\omega_m \mathbf{P} \mathbf{x},$$

et que $\mathbf{P} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1$ comme nous pouvons le voir grâce aux calculs suivants

$$\mathbf{P} \mathbf{A}_1 = (\mathbf{I}_N - c\Phi \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi) \left(\frac{K}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T - K r_\infty \mathbf{I}_N \right) = \mathbf{A}_1 - c \frac{K}{N} \Phi \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{1} \mathbf{1}^T + c K r_\infty \Phi \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi = \mathbf{A}_1,$$

où nous utilisons la propriété $\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{1} = N r_\infty$ pour annuler les deux derniers termes. Ensuite, en utilisant la propriété $\mathbf{A}_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ nous avons

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{A}_1 (\mathbf{x} - z(\mathbf{x})\mathbf{v}_1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{P} \mathbf{x}.$$

Finalement, en combinant les deux propriétés précédentes on obtient que la dynamique de δ est donnée par l'équation

$$\dot{\delta} = \mathbf{P} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + i\omega_m \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + i\omega_m \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{A}_1 \mathbf{P} \mathbf{x} + i\omega_m \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{A} \delta. \quad (4.37)$$

Ensuite, pour simplifier l'analyse de la stabilité du système nous faisons les changements de coordonnées suivants

$$\delta_\phi = \bar{\Phi} \delta = \bar{\Phi} \mathbf{x} - z(\mathbf{x}) \mathbf{1} = (\bar{\Phi} - c \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi) \mathbf{x}. \quad (4.38)$$

Avec les nouvelles coordonnées de la dynamique du biais vectoriel l'équation (4.37) prend la forme

$$\dot{\delta}_\phi = \mathbf{A}_\phi \delta_\phi \quad (4.39)$$

où $\mathbf{A}_\phi = \frac{K}{N} (\bar{\Phi} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi - N r_\infty \bar{\Phi}) + i\omega_m \mathbf{I}_N$.

Nous remarquons que la matrice \mathbf{A}_ϕ , tout comme la matrice \mathbf{A} , a une valeur propre $\lambda(\mathbf{A}_\phi) = i\omega_m$ dont le vecteur propre associé est $\mathbf{v}_1(\mathbf{A}_\phi) = \mathbf{1}$. En effet,

$$\mathbf{A}_\phi \mathbf{1} = \frac{K}{N} \bar{\Phi} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi \mathbf{1} - N r_\infty \bar{\Phi} \mathbf{1} + i\omega_m \mathbf{1} - i\omega_m \mathbf{1},$$

où nous utilisons à nouveau la propriété $\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{1} = N r_\infty$.

Comme $\bar{\Phi}$ est une matrice de rotation, le changement de coordonnées (4.38) est bien défini et les propriétés de stabilité du système (4.37) sont les mêmes que les propriétés du système

(4.39) avec δ_ϕ défini dans (4.38). Donc, dans le but d'analyser la stabilité nous considérerons l'ensemble des systèmes $\dot{\delta}_\phi = \mathbf{A}_\phi \delta_\phi$, où l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_{\phi_{K\omega}}$ est obtenu en utilisant la transformation $\mathbf{A}_\phi = \bar{\Phi} \mathbf{A} \Phi$ pour toutes les matrices $\mathbf{A} \in \mathbf{A}_{K\omega}$.

La raison qui nous pousse à introduire ce changement de coordonnées est la suivante. A la section 4.3 nous avons montré que pour un système à variables complexes décrit par $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$, la matrice $\text{Re}(\mathbf{A})$ peut avoir un rôle important dans l'analyse de la stabilité du comportement du système. Pour le système décrit par (4.39), la matrice $\mathbf{R}_\phi = \text{Re}(\mathbf{A}_\phi)$ est de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\phi &= \text{Re}(\mathbf{A}_\phi) = \frac{K}{N} \text{Re}(\bar{\Phi} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi - N r_\infty \bar{\Phi}) = \frac{K}{N} \text{Re}(\bar{\Phi} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \Phi) - K r_\infty \text{Re}(\bar{\Phi}) \\ &= \frac{K}{N} \text{Re}(\bar{\mathbf{v}}_1 \mathbf{v}_1^T) - K r_\infty \text{Re}(\bar{\Phi}) \\ &= \frac{K}{N} (\text{Re}(\bar{\mathbf{v}}_1) \text{Re}(\mathbf{v}_1)^T + \text{Im}(\bar{\mathbf{v}}_1) \text{Im}(\mathbf{v}_1)^T) - K r_\infty \text{Re}(\bar{\Phi}). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Rappelons que d'après le théorème 1 nous avons $\text{Re}(\bar{\Phi}) = -\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N) = -\mathbf{M}$, où $\mu_i = \pm N r_\infty \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\omega}_i}{K r_\infty}\right)^2}$. En notant $\mathbf{b} = \text{Re}(\mathbf{v}_1) = \left[\frac{\mu_1}{N r_\infty}, \dots, \frac{\mu_N}{N r_\infty}\right]^T$, $\mathbf{c} = \text{Im}(\mathbf{v}_1) = \left[\frac{\tilde{\omega}_1}{N r_\infty}, \dots, \frac{\tilde{\omega}_N}{N r_\infty}\right]^T$ on peut réécrire la matrice \mathbf{R}_ϕ comme suit

$$\mathbf{R}_\phi = \frac{K}{N} (\mathbf{M} + \mathbf{b} \mathbf{b}^T + \mathbf{c} \mathbf{c}^T). \quad (4.41)$$

Dans [2], pour analyser les propriétés de stabilité locale de la solution à verrouillage de phase, les auteurs linéarisent le modèle autour de la solution à verrouillage de phase (c'est-à-dire les points d'équilibre). La matrice jacobienne⁸ \mathbf{J} (calculée au point d'équilibre) dans son modèle linéarisé, coïncide avec la matrice \mathbf{R}_ϕ – voir les équations (3.4)-(3.5) dans [2]. Les propriétés de la matrice \mathbf{J} qui ont été analysées dans [2] (lemmes (1-3) et théorèmes (2-3)) sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 3 *Soit les paramètres K et $\Omega = [\omega_1, \dots, \omega_N]^T$ tels que l'hypothèse 1 est satisfaite et soit $\frac{|\tilde{\omega}_i|}{K r_\infty} < 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Alors pour l'ensemble $\mathbf{A}_{\phi_{K\omega}}$ de matrices \mathbf{R}_ϕ définies par (4.8) et (4.41), nous avons les propriétés suivantes :*

- La matrice \mathbf{R}_ϕ a une valeur propre nulle associée au vecteur propre $\mathbf{1}$.
- Si la matrice \mathbf{R}_ϕ qui correspond à l'équation (4.8) contient un signe moins alors la matrice \mathbf{R}_ϕ possède une valeur propre positive.
- Si la matrice \mathbf{R}_ϕ correspondant à l'équation (4.8) ne contient pas de signe moins⁹ alors il y a $(N - 2)$ valeurs propres négatives.
- De plus, $(N - 1)$ de ces valeurs propres sont de signe négatif si et seulement si la condition suivante est satisfaite

$$\sum_{j=1}^N \frac{1 - 2 \left(\frac{\tilde{\omega}_j}{K r_\infty}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\omega}_j}{K r_\infty}\right)^2}} > 0. \quad (4.42)$$

La preuve de cette proposition vient directement des preuves des lemmes (1 – 3) et des théorèmes (2 – 3) dans [2], c'est pourquoi nous ne la présentons pas ici.

⁸suivant la notation dans [2]

⁹tous les μ_i définis par des signes positifs correspondent au cas $\mu_i = N r_\infty \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\omega}_i}{K r_\infty}\right)^2}$, $i \in \{1, \dots, N\}$

Remarque 4 A partir de l'équation (4.9) et dans le cas où l'équation (4.8) est considérée uniquement avec des signes positifs nous avons $e^{i\phi_j} = \cos \phi_j + i \sin \phi_j = \frac{1}{Kr_\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\omega}_j}{Kr_\infty}\right)^2} + i \frac{\tilde{\omega}_j}{Kr_\infty}$. De plus, à partir de l'équation (4.42) nous pouvons réécrire l'expression sous la forme

$$\sum_{j=1}^N \frac{1 - 2(\sin^2(\phi_j))}{\cos \phi_j} = \sum_{j=1}^N \frac{\cos(2\phi_j)}{\cos \phi_j} > 0,$$

ou de manière équivalente

$$0 < \sum_{j=1}^N \frac{2 \cos^2(\phi_j - 1)}{\cos(\phi_j)} = \sum_{j=1}^N 2 \cos(\phi_j) - \sum_{j=1}^N \sec(\phi_j).$$

De par la définition $\sum_{j=1}^N \cos(\phi_j) = Nr_\infty$ nous avons finalement la condition nécessaire et suffisante (4.42) qui peut se mettre sous la forme plus simple

$$\sum_{j=1}^N \sec(\phi_j) < 2Nr_\infty.$$

Remarque 5 La condition que les différences de phases entre chaque paire d'oscillateurs ϕ_i et ϕ_j , $((i, j) \in \{1, \dots, N\}^2)$ soient inférieures à $\frac{\pi}{2}$ est formulée dans [2] comme une simple condition portant sur la matrice \mathbf{R}_ϕ pour que les valeurs propres soient négatives. Une interprétation de cette condition y est proposée. Une interprétation de cette condition, différente de celle proposée, vient de l'observation que toutes les entrées non-diagonales de la matrice \mathbf{R}_ϕ sont des fonctions cosinus de ces différences

$$(\mathbf{R}_\phi)_{i,j} = \cos(\phi_i - \phi_j), \quad (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, i \neq j.$$

Le vecteur $\mathbf{1}^T$ est un vecteur propre dont la valeur propre correspondante est zéro et à condition que $(\mathbf{R}_\phi)_{i,j} > 0$ pour tout $i \neq j$, alors la matrice \mathbf{R}_ϕ est une matrice laplacienne symétrique qui représente un graphe connecté et donc la matrice \mathbf{R}_ϕ a $N - 1$ valeurs propres négatives.

Dans la suite, nous restreignons notre attention sur le cas où en plus de l'hypothèse 1 nous supposons que $\frac{\tilde{\omega}_j}{Kr_\infty} < 1$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$. L'hypothèse 1 [2] tient compte de cette supposition.

Dans [2], il est montré qu'il n'y a qu'une seule solution qui est localement stable pour toutes les valeurs de K et de Ω satisfaisant l'hypothèse 1 parmi toutes les solutions à verrouillage de phase du modèle de Kuramoto. Ce qui peut s'appliquer à notre cas : nous prouverons dans la suite que tous les systèmes définis par $\mathbf{A}_{\phi_{K\omega}}$ sauf un, sont instables.

Theorème 2 Soit l'hypothèse 1 satisfaite et soit le système décrit par les équations (4.39) et (4.38) où la matrice $\mathbf{A}_\phi = \overline{\Phi} \mathbf{A} \Phi \in \mathbf{A}_{\phi_{K\omega}}$. Si la matrice \mathbf{A} définie par l'équation (4.19) correspond à l'équation (4.8) contenant au moins un signe moins, alors l'ensemble des points d'équilibre δ_ϕ est instable pour ce système.

Les systèmes définis par l'équation (4.8) contenant au moins un signe négatif sont instables. Il est clair qu'ils ne peuvent pas être de bons candidats pour une représentation linéaire du modèle de Kuramoto. Nous allons donc nous concentrer uniquement sur la partie gauche du système

$\dot{\boldsymbol{\delta}}_\phi = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}_\phi$. Dans cette expression tous les signes des expressions de r_∞ de l'équation (4.8) sont positifs, il en est de même pour les signes de $\boldsymbol{\mu}$ dans l'équation (4.41). On notera les matrices \mathbf{A} , \mathbf{A}_ϕ et \mathbf{R}_ϕ correspondant à ce choix de signe, respectivement par \mathbf{A}^+ , \mathbf{A}_ϕ^+ et \mathbf{R}_ϕ^+ .

De la proposition 3, la matrice \mathbf{A}_ϕ^+ a $N-1$ valeurs propres négatives, il est donc prévisible que le système linéaire correspondant soit stable et que $\boldsymbol{\delta}_\phi$ (ou de manière équivalente $\boldsymbol{\delta}$) converge vers zéro. Dans le théorème qui suit on démontre cette proposition et en plus on analyse le comportement asymptotique des solutions du système $\dot{\boldsymbol{\delta}}_\phi = \mathbf{A}_\phi^+ \boldsymbol{\delta}_\phi$.

Pour simplifier les notations nous utiliserons $\alpha = \lambda_2(\mathbf{R}_\phi^+)$ pour noter la seconde plus grande valeur propre de la matrice \mathbf{R}_ϕ^+ et nous rappelons que $\lambda_1(\mathbf{R}_\phi^+) = 0$.

Theorème 3 *Sous l'hypothèse 1, soit le système*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\phi^+ \mathbf{x}, \quad (4.43)$$

où \mathbf{A}_ϕ^+ correspond à l'équation (4.8) lorsque tous les signes sont positifs. Supposons que la condition (4.42) est satisfaite. Alors les affirmations suivantes sont validées :

I. L'origine $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est stable pour le système (4.43).

II. Pour toute condition initiale $\mathbf{x}_o \in \mathbb{C}^N$ et pour tout $t \geq 0$ le biais vectoriel $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{I}_N - c\boldsymbol{\Phi}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\boldsymbol{\Phi})\mathbf{x}$ est exponentiellement borné par

$$\|\boldsymbol{\delta}(t, \boldsymbol{\delta}_o)\| \leq e^{-\alpha t} \|\boldsymbol{\delta}_o\|,$$

où $\alpha = \lambda_2(\mathbf{R}_\phi^+)$ est la seconde plus grande valeur propre de la matrice laplacienne \mathbf{R}_ϕ^+ et $\boldsymbol{\delta}_o = (\mathbf{I}_N - c\boldsymbol{\Phi}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\boldsymbol{\Phi})\mathbf{x}_o$.

III. Pour presque toute condition initiale $\mathbf{x}_o \in \mathbb{C}^N$, les coordonnées du vecteur \mathbf{x} convergent exponentiellement vers un cycle limite :

$$x_i(t, \mathbf{x}_o) \rightarrow z_o e^{i(\phi_i + i\omega_m t)},$$

Les coordonnées de ce vecteur $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o)$ ont une vitesse de rotation asymptotique ω_m et leur position est modifiée d'un angle ϕ_i relatif au paramètre d'ordre pondéré .

Preuve

I. Nous commençons par remarquer que pour montrer la stabilité du système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{x}$, il est suffisant de prouver la stabilité du système

$$\dot{\mathbf{x}}_\phi = \mathbf{A}_\phi^+ \mathbf{x}_\phi, \quad \mathbf{x}_\phi \in \mathbb{C}^N \quad (4.44)$$

où le vecteur \mathbf{x}_ϕ est défini par le changement de coordonnées similaire à (4.38)

$$\mathbf{x}_\phi = \overline{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{x}. \quad (4.45)$$

Nous utiliserons la notation $\mathbf{A}_\phi^+ = \overline{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{A}^+ \boldsymbol{\Phi}$ comme pour l'équation

$$\mathbf{A}_\phi = \frac{K}{N} (\overline{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Phi} - Nr_\infty \overline{\boldsymbol{\Phi}}) + i\omega_m \mathbf{I}_N.$$

Comme nous l'avons stipulé à la section 4.3 au sujet de l'analyse de la stabilité, nous trouvons plus commode d'utiliser la représentation équivalente du système en variables réelles.

Comme pour la représentation réelle (4.32) du système (4.31), nous introduisons le vecteur $\mathbf{y}_\phi = [\text{Re}(\mathbf{x}_\phi^T), \text{Im}(\mathbf{x}_\phi^T)]^T$. Alors, le système (4.45) peut se réécrire sous la forme

$$\dot{\mathbf{y}}_\phi = \mathbf{A}_r^+ \mathbf{y}_\phi \quad (4.46)$$

$$\mathbf{A}_r^+ = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{A}_\phi^+) & -\text{Im}(\mathbf{A}_\phi^+) \\ \text{Im}(\mathbf{A}_\phi^+) & \text{Re}(\mathbf{A}_\phi^+) \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

où $\mathbf{y}_\phi = [\text{Re}(\mathbf{x}_\phi^T), \text{Im}(\mathbf{x}_\phi^T)]^T \in \mathbb{R}^{2N}$.

Considérons pour ce système la fonction de Lyapunov : $V : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$V_1(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}_\phi^T \mathbf{y}_\phi. \quad (4.48)$$

En prenant la dérivée de V_1 le long des trajectoires du système formé par les équations (4.46) et (4.47) et en utilisant la notation $\mathbf{y}_\phi = [\mathbf{y}_{\phi 1}^T, \mathbf{y}_{\phi 2}^T]^T = [\text{Re}(\mathbf{x}_\phi^T), \text{Im}(\mathbf{x}_\phi^T)]^T$ on obtient

$$\dot{V}_1 = \mathbf{y}^T \mathbf{A}_r^+ \mathbf{y} = \mathbf{y}_{\phi 1}^T \text{Re}(\mathbf{A}_\phi^+) \mathbf{y}_{\phi 1} + \mathbf{y}_{\phi 2}^T \text{Re}(\mathbf{A}_\phi^+) \mathbf{y}_{\phi 2} = \mathbf{y}_{\phi 1}^T \mathbf{R}_\phi^+ \mathbf{y}_{\phi 1} + \mathbf{y}_{\phi 2}^T \mathbf{R}_\phi^+ \mathbf{y}_{\phi 2}. \quad (4.49)$$

Nous rappelons que la matrice $\mathbf{R}_\phi^+ = (\mathbf{R}_\phi^+)^T$ est définie par les équations (4.40) et (4.41) avec uniquement des signes positifs pour définir r_∞ et μ .

Sous les hypothèses du théorème 3 la condition (4.42) est satisfaite. Dès lors, de la proposition 3 il vient que toutes les valeurs propres de \mathbf{R}_ϕ sont négatives ou nulles et donc $\dot{V}_1 \leq 0$ pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2N}$ et pour tout $t \geq 0$. Ainsi, l'origine $\mathbf{y}_\phi = \mathbf{0}$ est stable pour le système (4.46) et l'origine correspondante $\mathbf{x}_\phi = \mathbf{0}$ est stable pour le système (4.45). Enfin, pour prouver la stabilité de l'origine du système (4.43) on remarque que la transformation $\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}_\phi$ est bien définie et que $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}_\phi\|$ par le fait que Φ est une matrice de rotation. Le résultat suit.

II. Nous procédons de la même manière pour prouver la stabilité exponentielle de l'origine de la dynamique du biais vectoriel (4.37). Au début de cette section, nous avons montré que quelle que soit $\mathbf{A} \in \mathbf{A}_{K\omega}$, les dynamiques du biais vectoriel δ et du biais vectoriel δ_ϕ sont données respectivement par les équations (4.37) et (4.39). Dans le cas particulier de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbf{A}_{K\omega}$, comme $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+$, nous avons les dynamiques de δ et de δ_ϕ

$$\dot{\delta} = \mathbf{A}^+ \delta, \quad \text{et} \quad \dot{\delta}_\phi = \mathbf{A}_\phi^+ \delta_\phi, \quad (4.50)$$

où nous avons comme précédemment $\delta_\phi = \overline{\Phi} \delta$.

Ensuite, nous passons à la représentation réelle de la dynamique complexe. Nous utilisons la notation $\delta_\phi = (\delta_{\phi 1} + i\delta_{\phi 2})$ et nous introduisons le vecteur $\delta_\phi^r = [\delta_{\phi 1}^T, \delta_{\phi 2}^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}$. De même que pour la dynamique de \mathbf{y}_ϕ définie à la première partie de la preuve, les dynamiques de δ_ϕ^r sont données par l'équation suivante

$$\dot{\delta}_\phi^r = \mathbf{A}_\phi^+ \delta_\phi^r, \quad (4.51)$$

où \mathbf{A}_ϕ^+ est définie par l'équation (4.47). Maintenant nous allons définir la nouvelle fonction de Lyapunov $V_2 : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de la forme

$$V_2(\delta_\phi^r) = \frac{1}{2} \|\delta_\phi^r\|^2.$$

En prenant la dérivée de $V_2(\boldsymbol{\delta}_\phi^r)$ le long des trajectoires de l'équation (4.51) on a

$$\dot{V}_2 = (\boldsymbol{\delta}_\phi^r)^T \mathbf{A}_r^+ \boldsymbol{\delta}_\phi^r = (\boldsymbol{\delta}_{\phi 1}^r)^T \mathbf{R}_\phi^+ \boldsymbol{\delta}_{\phi 1}^r + (\boldsymbol{\delta}_{\phi 2}^r)^T \mathbf{R}_\phi^+ \boldsymbol{\delta}_{\phi 1}^r.$$

Par construction, le vecteur $\boldsymbol{\delta}_\phi$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{1}$, donc les vecteurs $\boldsymbol{\delta}_{\phi 1}^r$ et $\boldsymbol{\delta}_{\phi 2}^r$ sont aussi orthogonaux à $\mathbf{1}$. D'autre part, de la proposition (3) nous avons le vecteur $\mathbf{1}$ qui correspond à la valeur propre zéro de la matrice \mathbf{R}_ϕ^+ .

Lemme 2 *Si \mathbf{L} est une matrice laplacienne symétrique définissant un graphe connecté, alors*

$$\min_{\mathbf{1}^T \mathbf{x}=0, \sum \mathbf{x}_i \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \lambda_2(\mathbf{L}).$$

Ensuite, on utilisera le cas spécial du théorème de Courant-Fischer portant sur la matrice laplacienne symétrique [62] (voir aussi [104, 125]). On obtient une borne de la dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\lambda(\mathbf{R}_\phi^+)(\|\boldsymbol{\delta}_{\phi 1}^r\|^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{\phi 2}^r\|^2) \\ &\leq -\alpha \|\boldsymbol{\delta}_\phi^r\|^2 \leq -2\alpha V_2 \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

où on note $\alpha = \lambda_2(\mathbf{R}_\phi^+)$.

De la définition de $V_2(\boldsymbol{\delta}_\phi^r)$ et d'après l'équation (4.52) il vient que $\boldsymbol{\delta}_\phi^r$ converge exponentiellement vers zéro. En effet, en utilisant le théorème de comparaison dans [73] on a

$$V_2(\boldsymbol{\delta}_\phi^r(t, \boldsymbol{\delta}_{\phi 0}^r)) \leq V_2(\boldsymbol{\delta}_{\phi 0}^r) e^{-2\alpha t},$$

et finalement en utilisant la définition de $V_2(\boldsymbol{\delta}_\phi^r)$ on a pour tout $\boldsymbol{\delta}_{\phi 0}^r \in \mathbb{R}^{2N}$ et pour tout $t \geq 0$

$$\|\boldsymbol{\delta}_\phi^r(t, \boldsymbol{\delta}_{\phi 0}^r)\| \leq \|\boldsymbol{\delta}_{\phi 0}^r\| e^{-\alpha t}.$$

Dès lors, $\|\boldsymbol{\delta}\| = \|\boldsymbol{\delta}_\phi\| = \|\boldsymbol{\delta}_\phi^r\|$. De la dernière inégalité on obtient que cette borne est validée pour la norme du biais vectoriel $\boldsymbol{\delta}(t, \boldsymbol{\delta}_0)$

$$\|\boldsymbol{\delta}(t, \boldsymbol{\delta}_0)\| \leq \|\boldsymbol{\delta}_0\| e^{-\alpha t}. \quad (4.53)$$

et le point II du théorème 3 est prouvé.

III. Finalement, on analyse le comportement asymptotique de \mathbf{x} pour $t \rightarrow \infty$. Nous considérerons séparément deux cas de conditions initiales.

Cas 1. On note \mathbf{F}_1 l'ensemble des conditions initiales qui correspond au paramètre d'ordre pondéré égale à zéro. C'est-à-dire que l'ensemble \mathbf{F}_1 est défini par : $\mathbf{F}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} = 0\}$. Il est facile de voir que l'ensemble \mathbf{F}_1 est de dimension $N - 1$.

Premièrement, nous considérons le cas où $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{F}_1$. A partir de la proposition 2, la trajectoire du paramètre d'ordre pondéré $z = c \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}$ est définie par

$$z(t, z_0) = z_0 e^{i\omega_m t}, \quad z_0 = c \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}_0.$$

Nous avons donc $z_0 = 0$ pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{F}_1$ et dès lors, le paramètre d'ordre pondéré $z(t, z_0) = 0$ pour tout $t \geq 0$. En même temps, de la définition de $\boldsymbol{\delta}$ (voir (4.36)) nous avons

$$\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{I} - c \boldsymbol{\Phi} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Phi}) \mathbf{x} = \mathbf{x} - z \boldsymbol{\Phi} \mathbf{1}$$

et donc $\mathbf{x}_o = \boldsymbol{\delta}_o + z_o \boldsymbol{\Phi} \mathbf{1} = \boldsymbol{\delta}_o$. Alors, en utilisant l'équation (4.53) et le fait que $z(t, z_o) \equiv 0$ on peut borner la norme du vecteur \mathbf{x} comme suit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o)\| &= \|\boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}_o) + z(t, z_o) \boldsymbol{\Phi} \mathbf{1}\| = \|\boldsymbol{\delta}(t, \mathbf{x}_o)\| \\ &= \|\boldsymbol{\delta}(t, \boldsymbol{\delta}_o)\| \leq \|\boldsymbol{\delta}_o\| e^{-\alpha t} = \|\mathbf{x}_o\| e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Donc pour les conditions initiales appartenant à l'ensemble \mathbf{F}_1 , la convergence exponentielle de $\boldsymbol{\delta}(t, \boldsymbol{\delta}_\phi)$ vers zéro implique la convergence exponentielle vers zéro de \mathbf{x} .

Cas 2. Par la suite, nous considérons toutes les conditions initiales qui n'appartiennent pas à l'ensemble \mathbf{F}_1 . Pour plus de commodité nous noterons cet ensemble par $\mathbf{F}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} \neq 0\}$. Notons que $\dim(\mathbf{F}_1) = N - 1$ et donc la mesure de \mathbf{F}_1 est zéro. Alors, à partir de la définition de l'ensemble \mathbf{F}_2 on a $\mathbf{F}_2 \in \{\mathbb{C}^N / \mathbf{F}_1\}$ et donc l'ensemble \mathbf{F}_2 représente l'ensemble de presque toutes les conditions initiales.

Dans ce cas, à partir de la définition du biais vectoriel, nous avons

$$\|\boldsymbol{\delta}(t, \boldsymbol{\delta}_o)\| = \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o) - z(t, z_o) \boldsymbol{\Phi} \mathbf{1}\| = \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o) - z_o e^{i\omega_m t} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{1}\|$$

donc pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\|\mathbf{x}_i(t, \mathbf{x}_o) - z(t, z_o) e^{i\phi_i}\| \leq \|\boldsymbol{\delta}_o\| e^{-\alpha t} = \|\mathbf{x}_o - z_o \boldsymbol{\Phi} \mathbf{1}\| e^{-\alpha t}.$$

Dès lors que $\boldsymbol{\delta}$ converge exponentiellement vers zéro, nous avons

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o) - z_o e^{i\omega_m t} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{1}\| \leq \|\mathbf{x}_o - z_o \boldsymbol{\Phi} \mathbf{1}\| e^{-\alpha t}.$$

La dernière égalité implique que les coordonnées x_i convergent vers le paramètre d'ordre pondéré mais avec un décalage d'angles ϕ_i

$$x_i(t, \mathbf{x}_o) \rightarrow z_o e^{i(\phi_i + i\omega_m t)} \quad (4.54)$$

par conséquent, pour toutes les conditions initiales $\mathbf{x}_o \in \mathbf{F}_2$, ce qui est le cas pour presque toutes les conditions initiales, toutes les coordonnées du vecteur $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o)$ sont asymptotiquement en rotation à la vitesse ω_m . De plus la position de chaque éléments du vecteur sont décalées d'un angle ϕ_i relatif au paramètre d'ordre pondéré .

□

Remarque 6 En utilisant la terminologie adoptée pour les systèmes dynamiques existante dans la littérature et en associant les coordonnées du vecteur \mathbf{x} pour des oscillateurs individuels, nous pouvons reformuler la dernière partie du théorème de la façon suivante : pour presque toutes les conditions initiales $\mathbf{x}_o \in \mathbb{C}^N$, un réseau d'oscillateurs linéaires défini par l'équation (4.43) est synchronisé à la vitesse ω_m qui est égale la moyenne des fréquences naturelles ω_i . De plus, les oscillateurs sont asymptotiquement à phase verrouillée.

4.5 Application du modèle linéaire dans le modèle de Kuramoto

En utilisant le fait que $\mathbf{A}^+ = \frac{K}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T - K r_\infty \overline{\boldsymbol{\Phi}} + i\omega_m \mathbf{I}_N$ (voir équation (4.19)) nous pouvons réécrire l'équation (4.43) en coordonnées polaires

$$\dot{\rho}_i e^{i\theta_i} + i\rho_i e^{i\theta_i} \dot{\theta}_i = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \rho_j e^{i\theta_j} + K r_\infty e^{\theta_i} + i\omega_m \rho_i e^{\theta_i}. \quad (4.55)$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire on obtient l'équation de la partie imaginaire suivante

$$\rho_i \dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \rho_j \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (4.56)$$

Nous avons prouvé à la section précédente que pour $t \rightarrow \infty$ nous avons $x_i(t, \mathbf{x}_0) \rightarrow z_0 e^{i(\phi_i + i\omega_m t)}$. En utilisant la transformation en coordonnées polaires $x_i(t) = \rho_i(t) e^{i\theta_i(t)}$, ce résultat peut être reformulé en terme de convergence asymptotique de ρ et de θ . En particulier, nous en déduisons qu'à l'état stable pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, tous les ρ_i convergent vers la même valeur : $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_i(t, \mathbf{x}_0) = z_0$ et l'équation (4.56) se réduit au modèle de Kuramoto.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

Nous pouvons donc considérer le modèle de Kuramoto comme une projection asymptotique du système linéaire (4.43) pour presque toute condition initiale $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$.

Les simulations qui termineront ce chapitre mettent en évidence l'existence du cycle limite correspondant au paramètre d'ordre pondéré $z = c \mathbf{1}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{x}$ pour l'unique système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ respectant les critères définis précédemment. Nous verrons également qu'asymptotiquement ce comportement est similaire au comportement asymptotique du modèle de Kuramoto.

4.6 Simulations

Nous présenterons dans cette section quelques résultats de simulations du modèle linéaire, dont la matrice \mathbf{A} répond aux critères de stabilité du système linéaire mentionnés précédemment. Nous comparerons le comportement du modèle de Kuramoto (4.1) avec le comportement du modèle linéaire proposé à l'équation (4.6) de la section 4.1 pour $N = 4$ oscillateurs et un gain d'interconnexion K suffisamment grand pour assurer la synchronisation. D'autre part, la connexion entre les N oscillateurs est complète, c'est-à-dire que tous les oscillateurs sont reliés entre eux par un même coefficient constant et le vecteur des fréquences naturelles sera tel que : $\boldsymbol{\omega} = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$.

Dans un premier temps nous analyserons succinctement le comportement asymptotique de ce modèle. Nous prendrons dans la plupart des cas deux valeurs de $K = \{20, 50\}$. Les résultats de simulation seront présentés pour les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T, \\ \mathbf{x}_0 &= [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T, \end{aligned}$$

ou encore pour

$$\mathbf{x}_0 = [1 - i3, 5 + i3, 2.5 - i1.8, 3 - i5]^T.$$

Ensuite, nous présenterons quelques résultats de simulations concernant le modèle de Kuramoto (défini par l'équation (4.1) de la section 4.1). Les courbes mettront en évidence que suivant la valeur du gain K , il y a ou non synchronisation quelle que soit l'initialisation des phases. Les résultats sont obtenus suivants les valeurs des paramètres K et $\boldsymbol{\theta}_0$ suivants : $K = \{5, 10, 20\}$ et

$\theta_o = [5, 1.4, 0.7, 4.1]^T$ et $\theta_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$. Enfin, nous comparerons les courbes de phase des deux modèles pour un même gain suffisamment grand (permettant la synchronisation) $K = \{20, 50\}$ et pour les conditions initiales du modèle de Kuramoto $\theta_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$ et du modèle linéaire $\mathbf{x}_0 = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$.

4.6.1 Modèle linéaire

Dans cette section, nous mettrons en évidence les points abordés aux sections théoriques de ce chapitre :

- Pour une unique matrice \mathbf{A} vérifiant l'hypothèse 1, le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ a ses valeurs propres à partie réelles négatives dont une imaginaire $\lambda_1 = i\omega_m$ qui est associée au vecteur propre $\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_N}]^T$
- Les différences de phase $\psi_j - \psi_1$, pour $j \in \{2 \dots N\}$, du système (4.6) réécrit en coordonnées polaires, convergent vers des valeurs constantes.
- Le comportement asymptotique du système linéaire pour une unique matrice \mathbf{A} , a ses solutions à verrouillage de phase bornées par un cycle limite correspondant au paramètre d'ordre pondéré z . Comme nous le verrons à la section 4.6.3 ce comportement est le même que celui du modèle de Kuramoto.
- Le paramètre d'ordre pondéré z est borné et les conditions initiales \mathbf{x}_o appartiennent à cette trajectoire.

Les simulations ont été faites à partir du système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ où la matrice \mathbf{A} est définie par

$$\mathbf{A} = \frac{K}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T - \text{diag}(\boldsymbol{\mu} - i\tilde{\boldsymbol{\omega}}) + i\omega_m \mathbf{I}_N$$

où $\mu_j = \sqrt{(Kr_\infty)^2 - \tilde{\omega}_j^2}$ et où $\tilde{\omega}_j = \omega_m - \omega_j$. Pour obtenir ces résultats, nous avons pris $N = 4$ oscillateurs, $K = \{20, 50\}$, les fréquences naturelles d'oscillations ω_j sont définies par le vecteur $\boldsymbol{\omega} = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$ et deux vecteurs différents représentant les conditions initiales : $\mathbf{x}_0 = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$ et $\mathbf{x}_0 = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$. Les résultats numériques obtenus avec ces valeurs de paramètres sont résumés aux tableaux 4.1 et 4.2. Ces résultats sont valables quelles que soient les conditions initiales définies par \mathbf{x}_0 .

La moyenne des fréquences naturelles du système ω_m est donc dans ce cas : $\omega_m = 1.575$. Pour le gain d'interconnexion $K = 20$, la valeur de r_∞ définie par l'équation (4.8) en prenant tous les signes positifs, est de 0.9328 et nous obtenons $r_\infty = 0.9909$ pour $K = 50$. L'hypothèse 1 est donc bien vérifiée car $r_\infty \in]0, 1]$ et où $\tilde{\omega}_j = \omega_j - \omega_m$ et $-1 \leq \frac{\tilde{\omega}_i}{Kr_\infty} \leq 1$. D'autre part, d'après le théorème 2, un tel système peut être stable. Pour chaque valeur de K , la matrice \mathbf{A} a sa plus grande valeur propre $\lambda_1 = i\omega_m$ qui est la valeur moyenne des fréquences d'oscillations représentées par le vecteur $\boldsymbol{\omega}$. Le vecteur propre qui lui est associé est, comme on le souhaite : $\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, e^{i\phi_3}, e^{i\phi_4}]^T$, avec ϕ_j défini à l'équation (4.16) (voir Tab.4.1 et 4.2). Par conséquent, d'après le théorème 3 le système (4.43) a son origine $\mathbf{x} = 0$ stable quelles que soient les conditions initiales $\mathbf{x}_o \in \mathbb{C}^N$ et pour tout $t \geq 0$ le biais vectoriel $\boldsymbol{\delta}$ est exponentiellement borné. Ainsi que pour presque toutes les conditions initiales $\mathbf{x}_o \in \mathbb{C}^N$ les solutions à verrouillage de phase sont exponentiellement bornées par le paramètre d'ordre pondéré z (voir les figures 4.1, 4.2 et 4.3, 4.4) et ont une fréquence de rotation ω_m .

D'autre part, le tracé des différences de phase $\psi_j - \psi_1$, $j \in \{2, 3, 4\}$ (voir figure 4.5) du système (4.6), telles que $\mathbf{x}_j = \rho_j e^{i\psi_j}$, montre que ces différences par rapport à la phase de l'oscillateur 1

sont constantes. Ce qui met en évidence que la fréquence des différents oscillateurs du système sont décalées d'une constante ϕ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$.

Notons que pour certaines valeurs de K il n'existe pas de solution de r_∞ (équation (4.8)), donc le système n'est pas synchronisé.

La figure 4.6 montre que le paramètre d'ordre pondéré complexe caractérisant la trajectoire du cycle limite du système décrit par l'équation (4.6) a ses conditions initiales \mathbf{x}_0 sur cette trajectoire, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^N$

$K = 20$	
r_∞	0.9328
\mathbf{A}	$\begin{bmatrix} -13.4334 - 1.35i & 5 & 5 & \\ 5 & -13.4979 + 4i & 5 & 5 \\ 5 & 5 & -11.4637 - 7.2i & 5 \\ 5 & 5 & 5 & -11.2158 + 10.8i \end{bmatrix}$
λ	$[1.575i, -16.2429 - 4.612i, -17.5689 + 1.4222i, -15.799 + 7.9147i]^T$
$\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_4}]^T$	$[0.9894 - 0.1451i, 0.9925 + 0.1224i, 0.8966 - 0.4428i, 0.885 + 0.4655i]^T$
ϕ	$[-0.1456, 0.1227, -0.4587, 0.4842]^T$
$\mathbf{A}\mathbf{v}_1$	$[0.2427 + 1.5562i, -0.2047 + 1.5616i, 0.7408 + 1.3899i, -0.7788 + 1.369i]^T$
$\lambda_1 \mathbf{v}_1$	$[0.2427 + 1.5562i, -0.2047 + 1.5616i, 0.7408 + 1.3899i, -0.7788 + 1.369i]^T$
$\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{A}_1$	$[1.77, 1.77, 1.77, 1.77]^T 10^{-4}$

TAB. 4.1 – Valeurs numériques des paramètres du système (4.5) pour $N = 4$ avec le gain d'interconnexion $K = 20$ et le vecteur des fréquences naturelles $\omega = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$, $\forall \mathbf{x}_0$.

Le modèle linéaire décrit par l'équation (4.6) vérifie l'hypothèse 1 et certaines conditions mentionnées aux sections théoriques (voir tableaux 4.1 et 4.2) portant sur la construction de la matrice \mathbf{A} . Les solutions à verrouillage de phase du système sont asymptotiquement stables quelles que soient les conditions initiales \mathbf{x}_0 et convergent vers la trajectoire décrite par le para-

$K = 50$	
r_∞	0.9909
\mathbf{A}	$\begin{bmatrix} -36.9643 - .3i & 12.5 & 12.5 & 12.5 \\ 12.5 & -36.9884 + 4i & 12.5 & 12.5 \\ 12.5 & 12.5 & -36.2646 - 7.2i & 12.5 \\ 12.5 & 12.5 & 12.5 & -36.1815 + 10.8i \end{bmatrix}$
λ	$[1.575i, \quad -48.6925 - 4.9233i, \quad -49.1541 + 1.3903i, \quad -48.5522 + 8.258i]^T$
$\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_4}]^T$	$[0.9983 - 0.0581i, \quad 0.9988 + 0.0489i, \quad 0.9842 - 0.1771i, \quad 0.9825 + 0.1862i]^T$
ϕ	$[-0.0581, 0.049, -0.178, 0.1873]^T$
$\mathbf{A}\mathbf{v}_1$	$[0.0914 + 1.5723i, \quad -0.0771 + 1.5731i, \quad 0.2789 + 1.5501i, \quad -0.2932 + 1.5475i]^T$
$\lambda_1 \mathbf{v}_1$	$[0.0914 + 1.5723i, \quad -0.0771 + 1.5731i, \quad 0.2789 + 1.5501i, \quad -0.2932 + 1.5475i]^T$
$\mathbf{1}^T \Phi \mathbf{A}_1$	$[0.1011, \quad 0.1011, \quad 0.1011, \quad 0.1011]^T 10^{-8}$

TAB. 4.2 – Valeurs numériques des paramètres du système (4.5) pour $N = 4$ avec le gain d’interconnexion $K = 50$ et le vecteur des fréquences naturelles $\omega = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$, $\forall \mathbf{x}_0$.

mètre d’ordre pondéré z (voir figures 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 et 4.6). Chaque oscillateur a une vitesse de rotation égale à la moyenne des fréquences naturelles du système. D’autre part, chaque oscillateur a un angle de décalage constant les uns par rapport aux autres (voir figure 4.5).

Dans la suite des simulations, nous comparerons le modèle linéaire représenté par le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ et le modèle de Kuramoto pour $N = 4$ oscillateurs et pour un gain d’interconnexion K identique pour chacun des deux modèles. Mais avant ceci nous montrerons par les simulations que pour un gain d’interconnexion K suffisamment grand le modèle de Kuramoto est synchronisé.

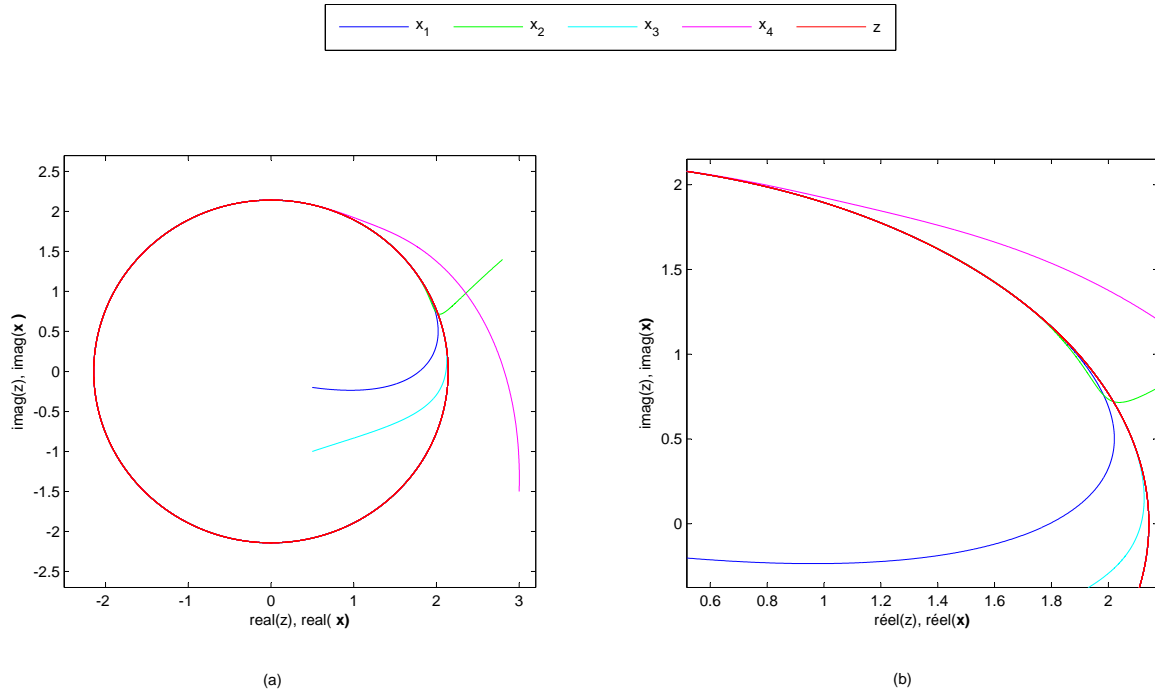


FIG. 4.1 – Comportement asymptotique du modèle linéaire (4.6) pour un gain $K = 20$ et pour les conditions initiales : $\mathbf{x}_o = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$. La courbe (b) est un zoom de la courbe (a).

4.6.2 Comportement synchronisé du modèle de Kuramoto

Les figures qui suivent sont générées à partir de l'équation (4.1) en considérant les paramètres K , ω et N définis en introduction de la section 4.6 et pour $\theta_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$. Il a été montré théoriquement que pour un gain d'interconnexion suffisamment grand le système décrit est dit synchronisé. D'après la figure 4.7, on voit bien que plus la valeur de K augmente plus le système tend à se synchroniser. De plus, les différences de phase entre θ_1 et les j autres oscillateurs tendent vers une constante, ce qui met en évidence le phénomène de synchronisation (voir figure 4.9). D'autre part, l'initialisation des N oscillateurs ne modifie pas le comportement asymptotique du système (voir figure 4.8). Nous pouvons observer un régime transitoire sur chacune des courbes.

4.6.3 Comparaison entre le modèle linéaire et le modèle de Kuramoto

Les courbes suivantes ont été réalisées à partir des deux modèles considérés dans ce chapitre. Le gain d'interconnexion ainsi que les fréquences naturelles sont identiques pour chacun des deux modèles. L'interconnexion est complète et nous utilisons à nouveau les mêmes valeurs de paramètres que précédemment pour K , ω et N . Dans le cas synchronisé, bien que les deux modèles étudiés présentent un régime transitoire différent l'un de l'autre, le comportement asymptotique des deux modèles est le même (voir figure 4.10). Nous avons vu à la section 4.6.1 que le comportement des solutions à verrouillage de phase correspond à un cycle limite. Nous pouvons voir sur la figure 4.11, que les différences de phases : $\psi_j - \psi_1$ et $\theta_j - \theta_1$ convergent vers le même résultat. Nous voyons également que les pentes sont identiques pour les deux modèles, la vitesse de rotation est donc la même. Comme nous l'avons étudié, le modèle linéaire décrit par le sys-

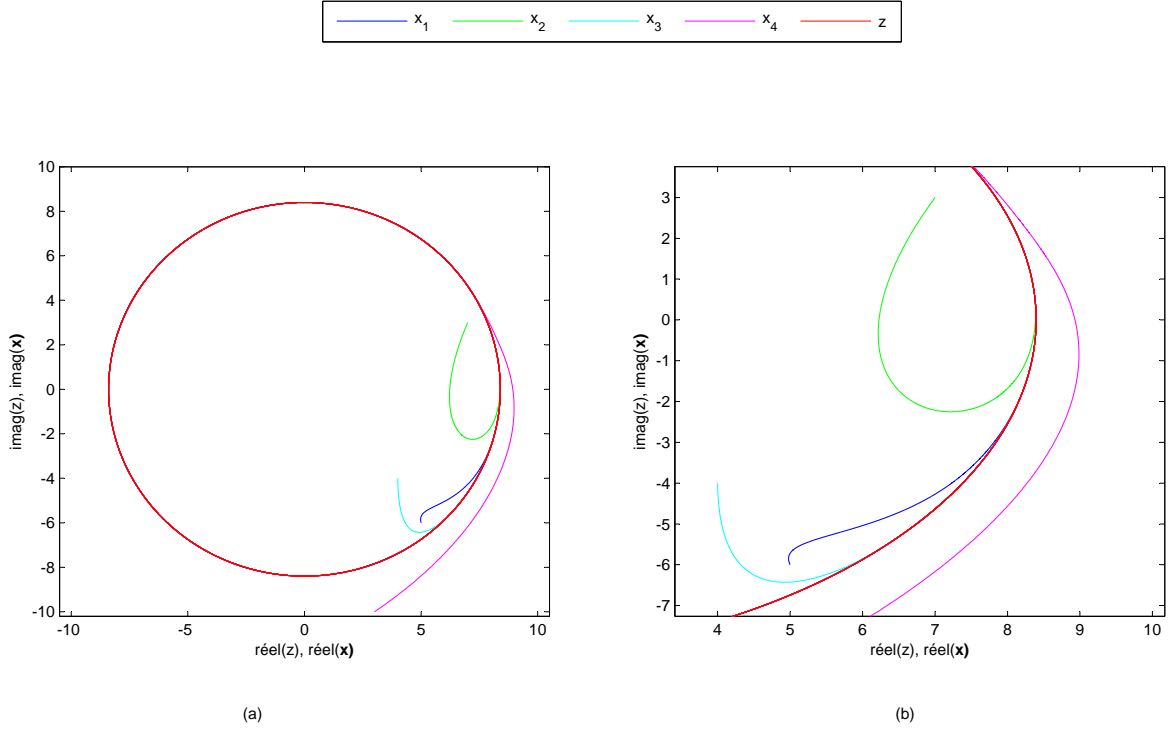


FIG. 4.2 – Comportement asymptotique du modèle linéaire (4.6) pour un gain $K = 20$ et pour les conditions initiales : $\mathbf{x}_0 = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$. La courbe (b) est un zoom de la courbe (a).

tème (4.6), dont la matrice \mathbf{A} respecte les conditions mentionnées dans la partie théorique de ce chapitre, permet bien d'obtenir un comportement asymptotique similaire au comportement asymptotique du modèle de Kuramoto, pour un même gain d'interconnexion K , et pour des fréquences naturelles identiques.

4.7 Conclusions

En prenant comme point de départ l'idée de [101] pour trouver un système linéaire dont le comportement est similaire à celui du modèle de Kuramoto, nous avons formulé des critères devant être satisfaits par ces systèmes et nous avons trouvé une famille de tels systèmes. L'analyse de cette famille de systèmes a montré qu'il existe un unique système stable. Finalement, nous avons prouvé qu'asymptotiquement le système linéaire a un cycle limite et que son comportement est similaire au modèle de Kuramoto pour une même même graphe d'interconnexion.

Les courbes présentées à cette section mettent en avant le comportement asymptotique synchronisé des solutions à verrouillage de phase du modèle (4.5), par la convergence vers un cycle limite correspondant au paramètre d'ordre pondéré z . La matrice \mathbf{A} du modèle linéaire a été construite de manière à ce que sa plus grande valeur propre soit égale à $i\omega_m$ et soit associée au vecteur propre $\mathbf{v}_1 = [e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, e^{i\phi_3}, e^{i\phi_4}]^T$ respectant ainsi les critères qui rendent les solutions à verrouillage de phase du système (4.5) asymptotiquement stables. D'autre part, un tel modèle a son comportement asymptotique similaire à celui du modèle de Kuramoto. Comme les

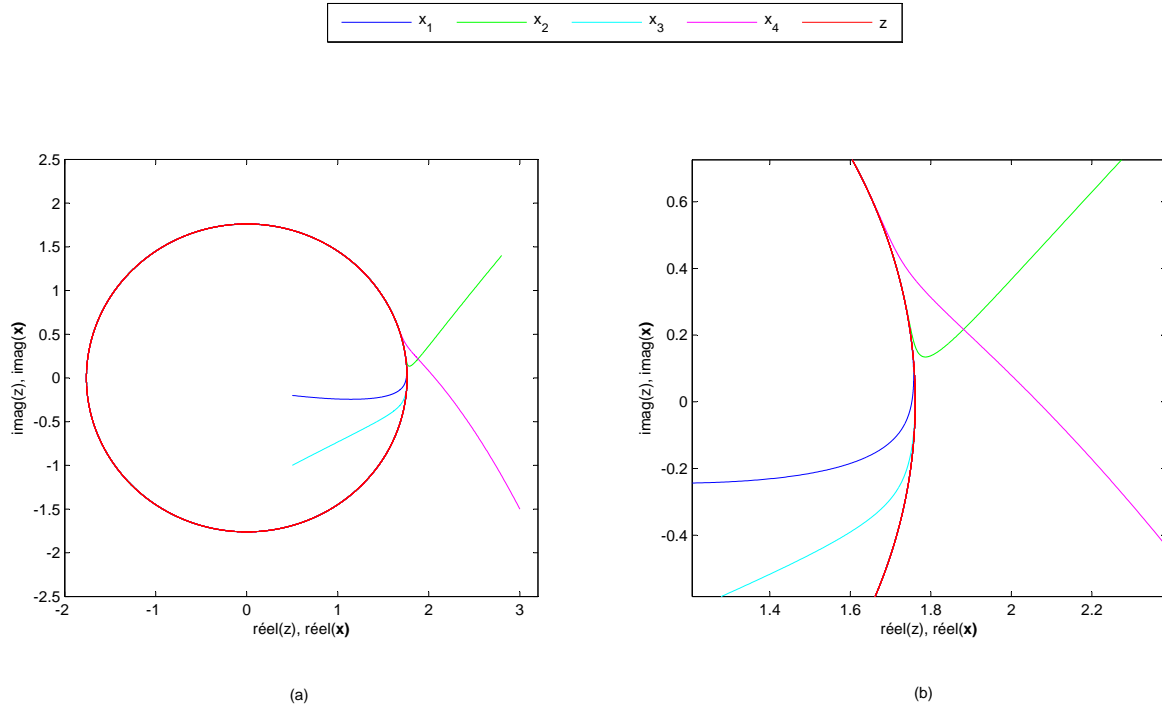


FIG. 4.3 – Comportement asymptotique du modèle linéaire (4.6) pour un gain $K = 50$ et pour les conditions initiales : $\mathbf{x}_0 = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$. La courbe (b) est un zoom de la courbe (a).

résultats de simulation de la figure 4.11 le montrent, nous pouvons voir qu'asymptotiquement, le comportement du modèle de Kuramoto (représenté par l'équation (4.1)) et du modèle linéaire (représenté par l'équation (4.6)) coïncident, comme nous l'avons démontré au théorème 3.

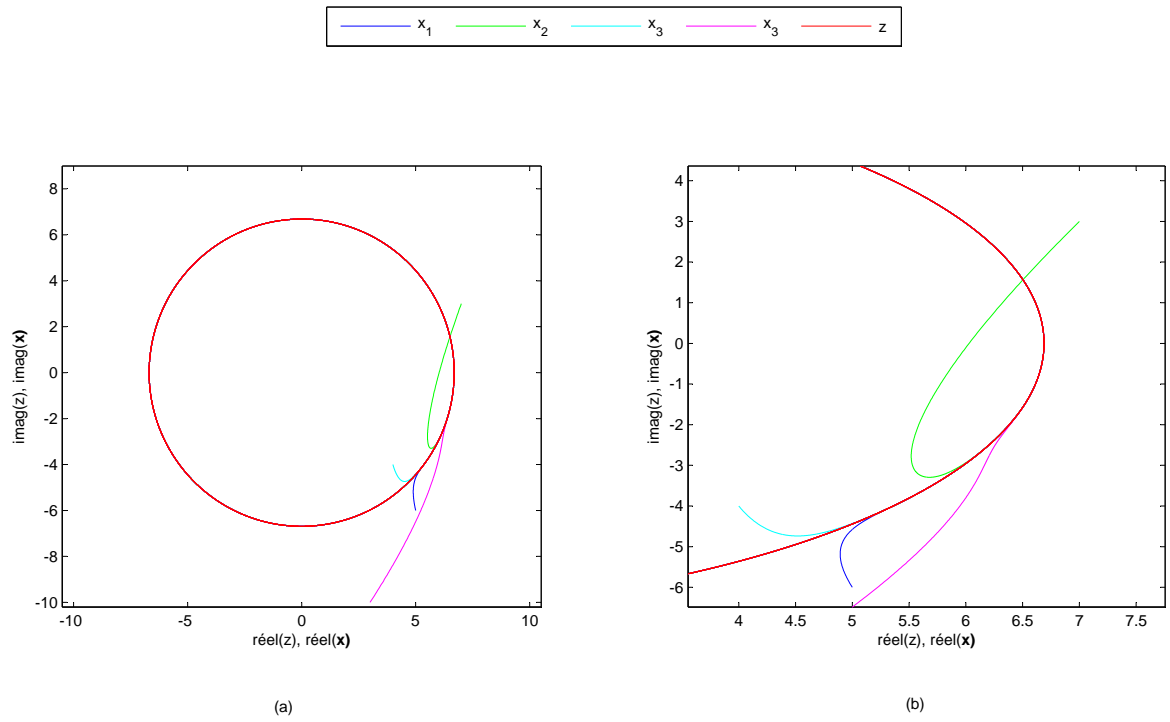


FIG. 4.4 – Comportement asymptotique du modèle linéaire (4.6) pour un gain $K = 50$ et pour les conditions initiales : $\mathbf{x}_0 = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$. La courbe (b) est un zoom de la courbe (a).

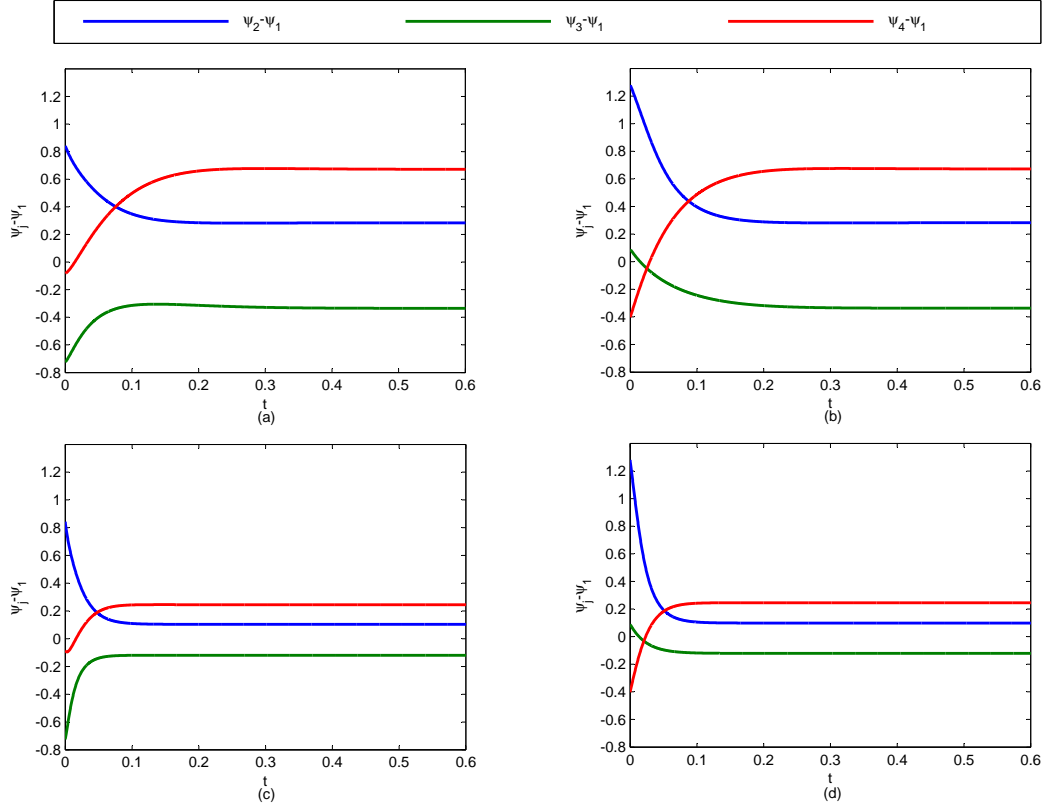


FIG. 4.5 – Différences de phase $\psi_j - \psi_1$, $j \in \{2, 3, 4\}$ pour le système (4.6), avec $K = 20$ et $\mathbf{x}_o = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$ (courbes (a)), $K = 20$ et $\mathbf{x}_o = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$ (courbes (b)), avec $K = 50$ et $\mathbf{x}_o = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$ (courbes (c)), $K = 50$ et $\mathbf{x}_o = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$ (courbes (d)).

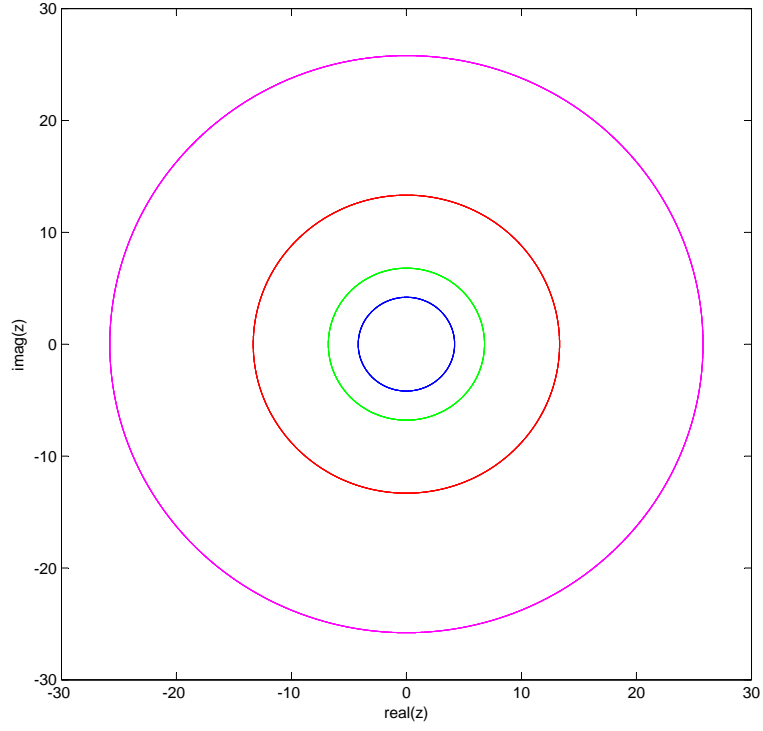


FIG. 4.6 – Comportement du paramètre d'ordre pondéré z pour $K = 50$ et pour $\mathbf{x}_o = [1 - i0.6, 2 + i0.7, 0.4 - i0.1, 0.3 - i1.6]^T$ (courbe bleue), $\mathbf{x}_o = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$ (courbe verte), $\mathbf{x}_o = [1 - i3, 5 + i3, 2.5 - i1.8, 3 - i5]^T$ (courbe rouge) et pour $\mathbf{x}_o = [5 - i6, 7 + i3, 4 - i4, 3 - i10]^T$ (courbe violette).

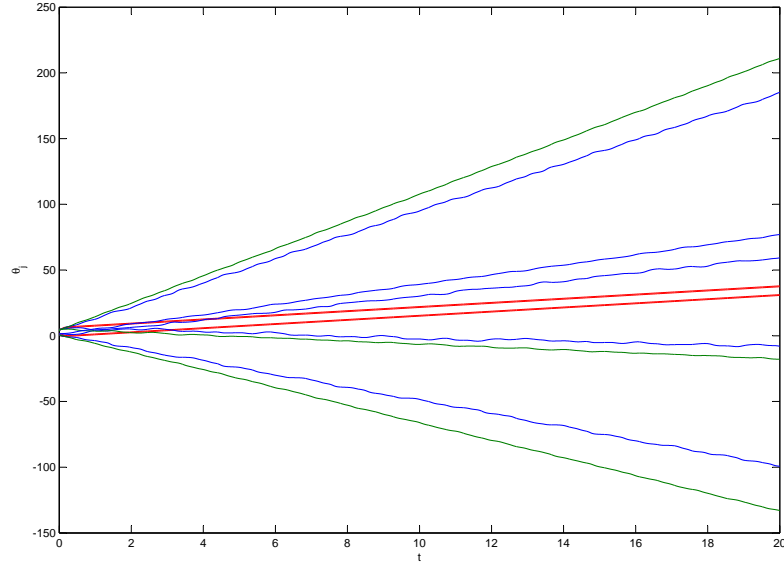


FIG. 4.7 – Comportement asymptotique de phase du modèle de Kuramoto (4.1), suivant la valeur du gain K , généré pour $N = 4$ oscillateurs ($j = \{1, \dots, 3, 4\}$), $\boldsymbol{\omega} = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$, et $\boldsymbol{\theta}_o = [5, 1.4, 0.7, 4.1]^T$. Les courbes vertes sont tracées pour $K = 5$, les courbes bleues pour $K = 10$ et les courbes rouges sont tracées pour $K = 20$.

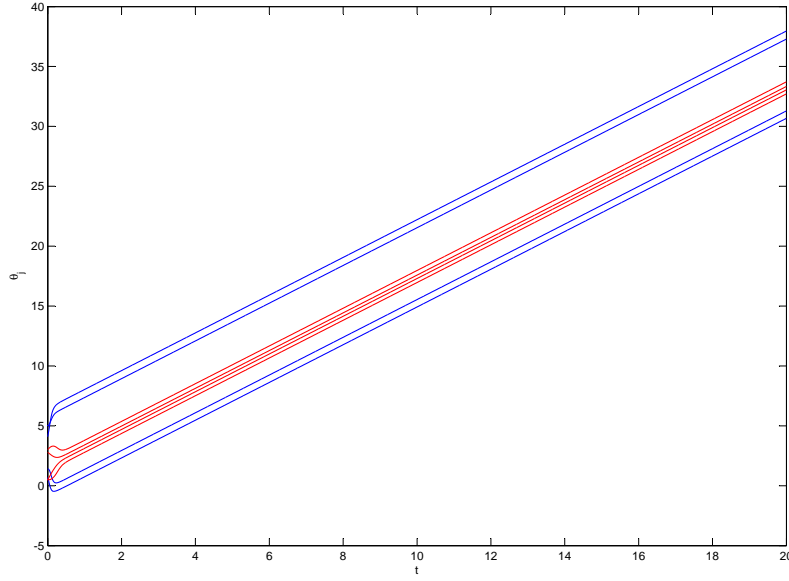


FIG. 4.8 – Comportement asymptotique de phase synchronisé du modèle de Kuramoto (4.1) suivant l'initialisation de θ_o pour $K = 20$, $\omega = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$ et $j = \{1, 2, 3, 4\}$. Les courbes bleues sont tracées pour $\theta_o = [5, 1.4, 0.7, 4.1]^T$ et les courbes rouges pour $\theta_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$.

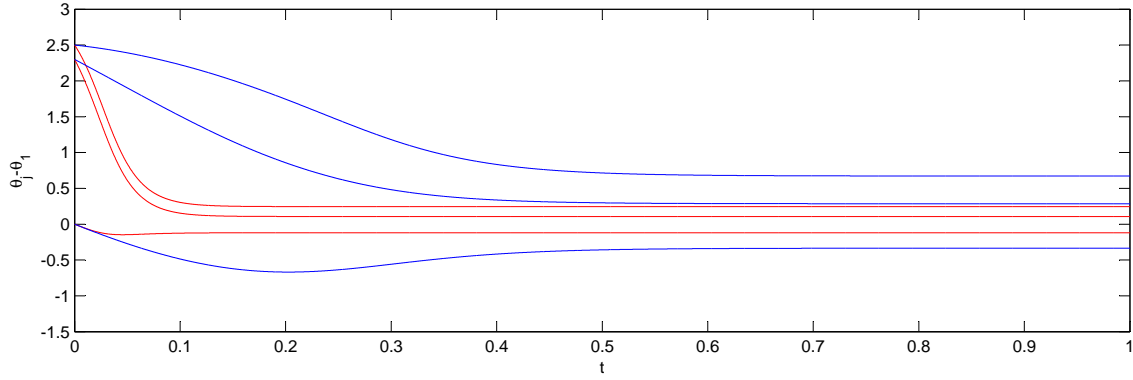


FIG. 4.9 – Différences de phases $\theta_j - \theta_1$, $j = \{2, 3, 4\}$ du modèle de Kuramoto (4.1) suivant la valeur du gain K dans le cas où les $N = 4$ oscillateurs sont synchronisés. Les fréquences naturelles sont : $\omega = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$ et l'initialisation des phases est : $\theta_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$. Les courbes bleues sont tracées pour $K = 20$ et les courbes rouges pour $K = 50$.

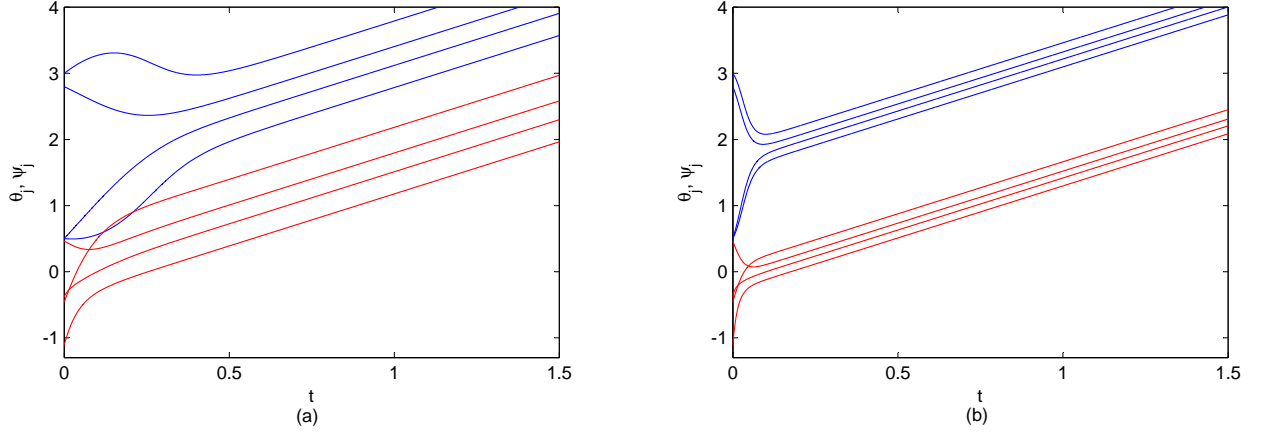


FIG. 4.10 – Comportement de phase ψ_j , du modèle linéaire (4.6) (courbes rouges) et du modèle de Kuramoto θ_j (4.1) (courbes bleues) pour un gain d'interconnexion suffisamment grand pour assurer la synchronisation. $K = 20$ (courbes (a)), $K = 50$ (courbes (b)). Dans chaque cas, $j = \{1, 2, 3, 4\}$, les fréquences naturelles sont : $\omega = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$, l'initialisation des modèles est : $\theta_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$ (pour le modèle de Kuramoto) et $\mathbf{x}_0 = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$ (pour le modèle linéaire).

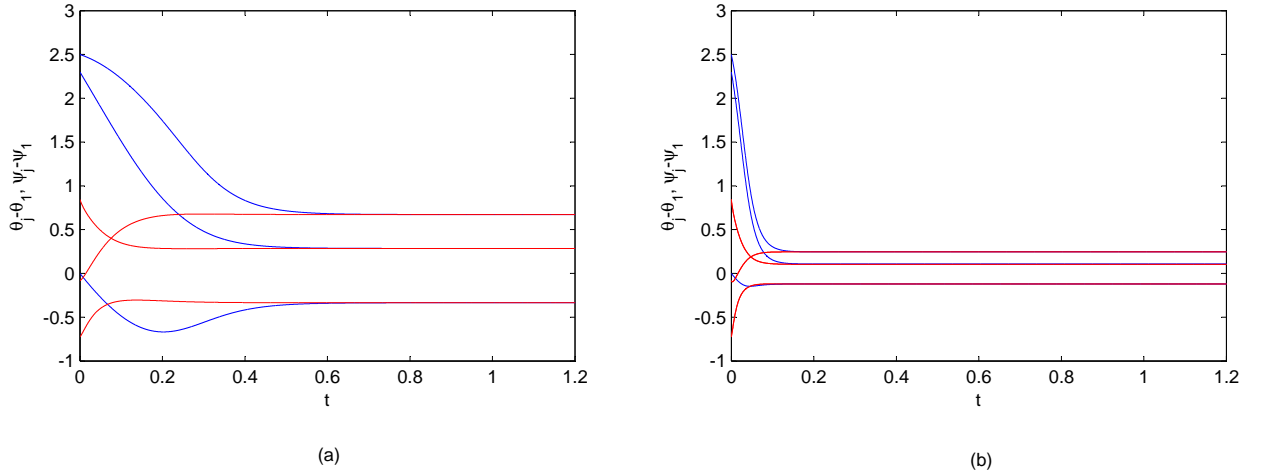


FIG. 4.11 – Différences de phases $\psi_j - \psi_1$ (en rouge) pour le système (4.6) et $\theta_j - \theta_1$ (en bleu) pour le système (4.1), $j = \{2, 3, 4\}$, avec $\omega = [-1.3, 4, -7.2, 10.8]^T$, $\mathbf{x}_0 = [0.5 - i0.2, 2.8 + i1.4, 0.5 - i, 3 - i1.5]^T$, $\theta_o = [0.5, 2.8, 0.5, 3]^T$ et pour un gain d'interconnexion $K = 20$ (courbes (a)) et $K = 50$ (courbes (b)).

Chapitre 5

Synchronisation pratique de réseaux hétérogènes, applications au réseau neuronal de Hindmarsh-Rose

5.1 Contexte général

Dans ce chapitre nous présentons les conditions suffisantes de synchronisation de systèmes complexes interconnectés et nous caractérisons le comportement de synchronisation qui apparaît.

L'analyse de ces systèmes interconnectés et leur capacité à produire un comportement de synchronisation collectif a été un sujet très étudié durant les dix dernières années par diverses communautés comme par exemple en biologie, en sociologie, en physique, en télécommunications et bien évidemment pour l'étude des systèmes dynamiques et en théorie du contrôle. Le large éventail des disciplines s'intéressant au sujet a permis de développer des angles d'approche allant de méthodes expérimentales et numériques à des méthodes plus théoriques.

Typiquement, les systèmes interconnectés complexes sont représentés comme des réseaux où chaque nœud correspond à un élément individuel (ou unité) et le lien entre chacun des nœuds correspond à l'existence de leur interaction [12, 104]. De manière générale, la synchronisation d'un système complexe dépend de plusieurs facteurs-clefs comme :

- la structure du réseau
- la dynamique de chaque élément, ou nœud, du réseau
- le type et le poids de la connexion entre les différents nœuds
- la présence externe ou interne de parasites et de retards affectant le comportement du système

Expliquons brièvement ce que ces termes signifient.

Structure du réseau. La théorie des graphes est généralement utilisée pour décrire les propriétés topologiques d'un réseau. Généralement, un réseau de N nœuds est défini par sa matrice adjacente $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, où les éléments c_{ij} spécifient une interconnexion entre le nœud i et le nœud j et $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$ (pour plus de détails se référer au chapitre 3, section 3.1, équation (3.1)).

Dynamiques des nœuds. Les dynamiques des nœuds sont généralement supposées à temps continu ou à temps discret. On notera que dans les dix dernières années l'analyse et le contrôle des réseaux

hybrides, c'est-à-dire des réseaux où les dynamiques des nœuds sont décrites par des équations à temps discret et des équations à temps continu, est un domaine qui a émergé. L'étude des dynamiques de ces réseaux est devenue un thème de recherche populaire tout particulièrement en informatique et en théorie du contrôle [74,128]. Dans ce chapitre, nous considérerons le cas des systèmes dynamiques à temps continu. La dynamique de chacun des nœuds composant le réseau est décrite par l'équation différentielle $\dot{x}_i = f(x_i)$. Un réseau dont tous les nœuds sont identiques, ce qui signifie que tous les nœuds ont la même dynamique $\dot{x}_i = x_i$, est appelé réseau *homogène* alors qu'un réseau *hétérogène* correspond à un réseau où tous les éléments pris individuellement ont des dynamiques différentes. L'hétérogénéité d'un réseau dont les nœuds sont structurellement similaires peut venir de la variation des paramètres qui caractérisent chaque nœud. Par exemple le réseau proie/prédateur ou encore les réseaux neuronaux. Dans ce cas, la dynamique du nœud i (avec le paramètre λ_i) est décrite par l'équation $\dot{x}_i = f(x_i, \lambda_i)$. Par exemple, le modèle dynamique de neurone de Hindmarsh-Rose, décrit au chapitre 2 section 2.2.3.2, est caractérisé par sept paramètres (voir l'équation (2.8)) et dépend de leur valeur. Nous rappelons qu'un neurone isolé peut générer des spikes, des bursts ou encore être au repos, en fonction de la valeur de ses paramètres.

Interaction entre les nœuds. Dans la plupart des cas l'interaction entre les différents nœuds d'un réseau dépend de plusieurs paramètres :

- de l'état de la variable de sortie du nœud qui intervient dans le terme de couplage,
- la forme du couplage, c'est-à-dire la manière dont le nœud i affecte le nœud j ,
- la force de couplage.

Dans ce chapitre, nous considérerons le cas particulier du couplage diffusif que nous avons défini pour les réseaux neuronaux au chapitre 2, section 2.3.1. Pour compléter cette définition, nous ajoutons qu'une telle connexion a ses entrées et ses sorties supposées de même dimension et que le couplage entre les nœuds i et j est défini comme la différence pondérée $\gamma(y_i - y_j)$, où y_i, y_j sont les sorties respectives du nœud i et du nœud j et où $\gamma > 0$ est une constante. Remarquons que si le couplage diffusif est linéaire ce n'est généralement pas le cas pour d'autre type de couplage. Comme nous l'avons vu au chapitre 4, le modèle de Kuramoto est couplé par une fonction sinusoïdale. Nous avons également vu au chapitre 1, section 2.3.1, le cas du couplage synaptique qui n'est pas linéaire et qui est souvent utilisé [4, 6, 24, 34, 83]. D'autres types de connexion non-linéaires ont été utilisés par exemple dans [79, 122].

Caractérisation du mouvement synchrone

La synchronisation des systèmes dynamiques complexes soulève deux questions fondamentales :

- Comment caractériser la solution synchronisée et sa stabilité ?
- Quelle est la caractérisation de la dynamique asymptotique du système évoluant sur la variété de synchronisation ?

L'interprétation la plus générale de la synchronisation consiste à dire que les comportements d'au moins deux éléments dynamiques sont corrélés. Dans ce cadre général (voir [11]), la synchronisation par rapport à une fonctionnelle est définie comme l'égalité à zéro de cette fonctionnelle le long des trajectoires du système. Une formulation précise de ce type de synchronisation a été

présentée au chapitre 3, section 3.2, définition 3.2.2.

Dans le contexte de réseaux non linéaires, la synchronisation des nœuds est communément comprise comme le mouvement simultané des nœuds du réseau qui peut être représenté comme une égalité des états ou des sorties des nœuds correspondants du réseau. Sans détails rigoureux, ce type de synchronisation correspond au cas où les comportements asymptotiques de tous les nœuds du système suivent la même trajectoire. Ce problème de synchronisation peut-être formulé en termes d'existence et de stabilité de la variété de synchronisation. Ce dernier étant défini comme un ensemble où tous les états (ou toutes les sorties) du système sont égaux.

Dynamiques des systèmes sur les variétés de synchronisation

L'interaction entre trois aspects clés des réseaux dynamiques - topologie du réseau, dynamiques de chacun des nœuds et type de connexion - conduit à un nouveau phénomène de dynamique collective qui n'est pas nécessairement observé pour chacune des dynamiques des éléments du réseau. La synchronisation des nœuds implique que les dynamiques asymptotiques de tous les nœuds tendent vers une unique dynamique. Dans le cas d'un réseau homogène, il est évident que les différentes dynamiques des nœuds coïncident asymptotiquement avec une dynamique commune. En revanche, pour un réseau hétérogène, trouver les dynamiques synchronisées n'est pas chose aisée. Simultanément, il est clair que ce sont ces dynamiques qui caractérisent le comportement du réseau.

Dans ce chapitre, nous essayons d'estimer approximativement ces dynamiques en termes de dynamique individuelle (dynamique de chaque nœud du réseau) et en termes de structure et de topologie du réseau. Pour cela, nous considérerons le problème de synchronisation pour un réseau hétérogène à couplage diffusif dont chaque nœud possède la propriété de semi-passivité et nous formulerons les conditions qui nous permettront :

- d'assurer la stabilité pratique de la trajectoire de synchronisation,
- de proposer un modèle de dynamiques synchronisées et d'analyser ses propriétés de stabilité.

Ce chapitre est organisé en 7 sections. Nous donnerons tout d'abord la description du réseau étudié au cours des sections 5.2 à 5.5. Nous formulerons précisément le problème posé ainsi que les notions relatives à ce problème. A la section 5.6, nous présenterons les principaux résultats théoriques ainsi que leur preuve. L'application de ces résultats au modèle de réseau de neurones de Hindmarsh-Rose sera rapportée à la section 5.7. Enfin, nous présenterons à la section 5.8 les résultats de simulations numériques du modèle de réseau de neurones de Hindmarsh-Rose qui illustreront les résultats théoriques de la section 5.7.

5.2 Reformulation du problème et notions connexes

5.2.1 Description du modèle

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de synchronisation pour un réseau composé de N systèmes dynamiques non linéaires hétérogènes et couplés de manière diffusive. Nous supposons que tous les systèmes pris individuellement ont une entrée et une sortie de même dimension. Afin de simplifier les notations nous noterons $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$, avec $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble des élé-

ments du réseau.

Dynamiques individuelles des éléments

Comme dans [97, 98] nous supposons que les dynamiques de chaque élément du réseau $i \in \mathcal{I}$ sont décrites par

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C}\mathbf{x}_i, \quad (5.2)$$

où $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement les états, l'entrée et la sortie du $i^{\text{ème}}$ élément, $m \leq n$, $\mathbf{f}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions localement Lipschitz et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont des matrices constantes de rang plein.

Dans la description ci-dessus les éléments peuvent être hétérogènes du fait que la fonction \mathbf{f}_i qui définit les dynamiques individuelles des éléments, peut être différente (mais de même dimension). De plus, nous supposons que les matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} sont les mêmes pour tous les éléments et satisfont l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 *Les matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} sont de rang plein, c'est-à-dire $\text{rang}(\mathbf{B}) = \text{rang}(\mathbf{C}) = m$ et de plus la matrice $\mathbf{CB} = \mathbf{I}_m$.*

Remarque 7 La contrainte de l'hypothèse 1 peut être diminuée en supposant que la matrice \mathbf{BC} est similaire à une matrice définie positive. Cependant, pour une présentation plus claire, nous préférons imposer une hypothèse plus forte.

Si l'hypothèse 1 est satisfaite alors le sous-système (5.1), (5.2) peut être transformé dans la forme normale suivante (voir [98, 99])

$$\dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) + \mathbf{u}_i \quad (5.3)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i), \quad (5.4)$$

où $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^{n-m}$, les fonctions $\mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ et où les sous-systèmes (5.4) correspondent aux zéros dynamiques des éléments (voir [64, 65]).

De la même manière que dans [80, 92, 97, 98], nous supposons que les dynamiques des éléments du réseau satisfont les hypothèses suivantes

Hypothèse 2 *Tous les éléments*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_i &= \mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) + \mathbf{u}_i \\ \dot{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i), \end{aligned} \quad i \in \mathcal{I}$$

sont strictement semi-passifs par rapport à l'entrée \mathbf{u}_i et la sortie \mathbf{y}_i et les fonctions de stockage $V_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, où $i \in \mathcal{I}$, sont continument dérivables et radialement non bornées.

Hypothèse 3 *Il existe des fonctions définies positives, continument dérivables $V_{oi} : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et il existe des constantes $\alpha_i > 0$ ($i \in \mathcal{I}$) telles que l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\nabla V_{oi}^T(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) (\mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1) - \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}, \mathbf{z}_2)) \leq -\alpha_i \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|^2 \quad (5.5)$$

pour tout $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

5.2.2 Structure du réseau et interconnexion entre les nœuds

Tout d'abord, nous supposons que le graphe d'interconnexion du réseau est connecté (voir définition 3.1.2) et non orienté. Dans ce cas les interconnexions entre les nœuds sont données par la matrice adjacente $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $(i, j) \in \mathcal{I}^2$ où le poids des interconnexions satisfait la propriété $a_{ij} = a_{ji}$. La matrice laplacienne correspondante est définie par

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^N a_{ik} & \text{si } i = j, \end{cases}$$

où encore

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N a_{1i} & -a_{12} & \dots & -a_{1N} \\ -a_{21} & \sum_{i=1}^N a_{2i} & \dots & -a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1} & -a_{N2} & \dots & \sum_{i=1}^N a_{Ni} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

où toutes les sommes des lignes sont égales à zéro. Comme la matrice est symétrique $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$ et que le réseau est connecté, toutes les valeurs propres de la matrice laplacienne sont réelles et de plus, la matrice \mathbf{L} a une valeur propre λ_1 exactement égale à zéro et ses autres valeurs propres sont strictement positives $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$.

Nous supposons que tous les éléments du réseau sont connectés par un couplage diffusif qui représente une relation statique entre les entrées et les sorties des éléments, c'est-à-dire que pour le $i^{\text{ème}}$ élément le couplage est donné par la relation suivante

$$\mathbf{u}_i = -\sigma (a_{i1}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_1) + a_{i2}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_2) \dots + a_{iN}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_N)), \quad (5.7)$$

où σ est un scalaire correspondant à la force de couplage entre les éléments.

5.2.3 Dynamiques globales du réseau

A partir de (5.3), (5.4), ainsi qu'en utilisant l'expression du couplage diffusif (5.7), les dynamiques du réseau global peuvent être écrites comme suit

$$\dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) - \sigma (a_{i1}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_1) + a_{i2}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_2) \dots + a_{iN}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_N)) \quad (5.8)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i), \quad (5.9)$$

Ensuite, par abus de notations nous définissons les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du réseau par

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{y}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mN}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mN}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{z}_2 \\ \dots \\ \mathbf{y}_N \\ \mathbf{z}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nN}$$

et la fonction $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$ par

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) \\ \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) \end{bmatrix}_{i \in \mathcal{I}} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

En utilisant ces notations ainsi que l'équation (5.7), le couplage diffusif entre les éléments peut s'écrire sous la forme¹

$$\mathbf{u} = -\sigma(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m)\mathbf{y}.$$

Ainsi, les dynamiques du réseau complet peuvent s'écrire sous la forme compact suivante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m)\mathbf{y} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_m^T) \mathbf{x} = (\mathbf{I}_N \otimes [\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m \times (n-m)}]) \mathbf{x}. \quad (5.12)$$

5.2.4 Formulation du problème

Dans le cas d'un réseau où tous les nœuds sont identiques (c'est-à-dire dans le cas où $\mathbf{f}_i(x) = \mathbf{f}_j(x)$ pour tout i et pour tout $j \in \mathcal{I}$), la synchronisation (asymptotique) est souvent décrite en terme d'évolution identique des éléments. Par conséquent elle est formulée comme la stabilité (asymptotique) de la variété de synchronisation

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN} : \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \dots = \mathbf{x}_N \}, \quad (5.13)$$

La stabilité de cette variété peut être déduite en utilisant les résultats et les méthodologies développées pour les systèmes *incrémentalement stables entrée-sortie* (*incremental input-output stable systems*) semi-passifs ou passifs [54, 71, 81, 98, 99, 105].

Le comportement des réseaux d'éléments non-identiques est plus complexe de par le fait que la variété de synchronisation \mathcal{S} n'existe pas à cause des différences entre les dynamiques des éléments. Pourtant, un réseau hétérogène peut montrer un certain type de comportement collectif. Dans ce cas, nous pouvons parler de *synchronisation pratique* (*practical synchronization*) pour laquelle les différences entre l'évolution des dynamiques des différents éléments sont bornées et deviennent petites pour les valeurs du gain d'interconnexion σ suffisamment grandes.

Dans ce chapitre, nous montrons que dans le cas général d'un réseau hétérogène nous pouvons caractériser l'évolution des dynamiques du réseau en utilisant deux propriétés bien distinctes : synchronisation et dynamiques émergentes. En particulier, pour les valeurs suffisamment grandes du paramètre σ , le comportement du réseau peut se décomposer en deux parties. L'une de ces deux parties correspond aux dynamiques de l'élément moyen (*mean-field*)

$$\mathbf{x}_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n \quad (5.14)$$

et la seconde partie décrit les dynamiques des éléments du réseau par rapport aux dynamiques de l'élément moyen \mathbf{x}_s .

A partir des équations (5.8), (5.9) et (5.14) et en utilisant les propriétés du couplage diffusif, nous pouvons réécrire les dynamiques de l'élément moyen $\mathbf{x}_s = [\mathbf{y}_s^T, \mathbf{z}_s^T]^T$ comme suit

$$\dot{\mathbf{y}}_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) \quad (5.15)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i). \quad (5.16)$$

¹Le symbole \otimes désigne le produit de Kronecker.

En notant

$$f_s^1(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s) \quad (5.17)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_s &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) - \mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)) \\ &= f_s^1(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) - \mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)). \end{aligned}$$

De manière similaire, en notant

$$f_s^2(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s), \quad (5.18)$$

nous réécrivons (5.16) comme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_s &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) - \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)) \\ &= f_s^2(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) - \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)). \end{aligned}$$

Nous remarquerons que dans le cas où le réseau est *pratiquement synchronisé*, les différences $\mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) - \mathbf{f}_i^1(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)$ et $\mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) - \mathbf{f}_i^2(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)$ seront petites et donc les dynamiques de l'élément moyen peuvent être vues comme une perturbation des dynamiques de l'état nominal (*steady-state*) donnée par les fonctions $f_s^1(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)$ et $f_s^2(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)$. En fait, ces dynamiques de l'état nominal correspondent au comportement collectif émergent du réseau.

Dans ce qui suit nous supposons que l'élément moyen possède certaines propriétés de stabilité. Nous supposons en particulier que les dynamiques de l'état nominal de l'élément moyen possèdent un attracteur. Ce qui nous fait poser l'hypothèse suivante

Hypothèse 4 *Il existe un ensemble compact invariant $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, localement AS (localement Asymptotiquement Stable) pour le système*

$$\dot{\mathbf{y}}_s = f_s^1(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s) \quad (5.19)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_s = f_s^2(\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s) \quad (5.20)$$

avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un domaine d'attraction. De plus, nous supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov continument dérivable $V_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ et qu'il existe des fonctions $\alpha_i \in \mathcal{K}_{\infty}$, avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ telles que pour tout $\mathbf{x}_s \in \mathcal{D}$ nous avons

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|\mathbf{x}_s\|_{\mathcal{A}}) &\leq V_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}_s\|_{\mathcal{A}}) \\ \dot{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s) &\leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}_s\|_{\mathcal{A}}) \\ \left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_s} V_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s) \right\| &\leq \alpha_4(\|\mathbf{x}_s\|_{\mathcal{A}}), \end{aligned}$$

où la distance par rapport à l'ensemble \mathcal{A} est définie comme $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} := \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Dans la suite, nous utiliserons l'élément moyen pas seulement pour analyser l'apparition du comportement de synchronisation mais également pour analyser les propriétés de synchronisation du réseau. Pour ce faire, de manière similaire à la méthode employée pour (5.13), nous introduisons l'ensemble de synchronisation d'état

$$\mathcal{S}_x = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN} : \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_s = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_s = \dots = \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_s = \mathbf{0}\}, \quad (5.21)$$

et l'ensemble de synchronisation de sortie

$$\mathcal{S}_y = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN} : \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_s = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_s = \dots = \mathbf{y}_N - \mathbf{y}_s = \mathbf{0}\}, \quad (5.22)$$

où $\mathbf{y}_s = \mathbf{E}_m^T \mathbf{x}_s$. Ensuite, on associe la *synchronisation de sortie-état* (*state/output synchronization*) du réseau à la stabilité pratique de l'ensemble de synchronisation, respectivement \mathcal{S}_x et \mathcal{S}_y .

Pour résumer, nous proposons de caractériser les propriétés de synchronisation du réseau en terme de stabilité pratique de deux ensembles fermés : l'ensemble \mathcal{S}_x (ou encore \mathcal{S}_y) et l'attracteur \mathcal{A} de l'élément moyen \mathbf{x}_s . Pour cela, nous introduisons dans ce qui suit la définition de la stabilité pratique d'un ensemble. Cette définition est similaire à la définition de la stabilité pratique d'un point d'équilibre introduite dans [23, 117].

Considérons un système d'équations différentielles paramétrées

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \epsilon), \quad (5.23)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitz et nous supposons que $\epsilon \in]0, \epsilon_o]$. Pour une telle famille, nous introduisons par la suite la notion de *stabilité pratique asymptotique uniforme* (globalement) pour un ensemble fermé (pas nécessairement compact).

Définition 5.2.1 *Pour le système (5.23), l'ensemble fermé \mathcal{A} est uPAS (uniformément Prati- quement Asymptotiquement Stable - practically uniformly asymptotically stable) si il existe une constante $r^* > 0$ et un ensemble \mathcal{D}_o ($\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_o \subset \mathbb{R}^n$) tels que pour toutes conditions initiales $\mathbf{x}_o \in \mathcal{D}_o$, le système (5.23) est forward-complete (c'est-à-dire que les solutions du système existent $\forall t \geq 0$) et*

1. *pour tout $r > 0$ donné, il existe $R > 0$ et un $\epsilon^* \in]0, \epsilon_o]$, tel que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon^*]$*

$$\|\mathbf{x}_o\| \leq r \quad \implies \quad \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o, \epsilon)\| \leq R, \quad \forall t \geq 0$$

2. *pour tous (r, δ) donnés avec $0 < \delta < r < r^*$, il existe $\epsilon^* \in]0, \epsilon_o]$ tel que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon^*]$*

$$\|\mathbf{x}_o\|_{\mathcal{A}} \leq \delta \quad \implies \quad \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o, \epsilon)\|_{\mathcal{A}} \leq r, \quad \forall t \geq 0$$

3. *pour tous (r, δ) donnés, avec $0 < \delta < r < r^*$, il existe $T = T(r, \delta)$ et $\epsilon^* \in]0, \epsilon_o]$ tel que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon^*]$ et pour tout \mathbf{x}_o satisfaisant la propriété $\|\mathbf{x}_o\|_{\mathcal{A}} \leq r$, nous avons*

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o, \epsilon)\|_{\mathcal{A}} \leq \delta \quad \forall t \geq T.$$

D'autre part, si le système est forward-complete pour toutes conditions initiales $\mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n$ et si les propriétés 2 et 3 sont maintenues pour $r^* = \infty$, alors l'ensemble \mathcal{A} est uGPAS (uniformément Globalement Prati- quement Asymptotiquement Stable - practically uniformly globally asymptotically stable).

Pareillement à la définition d'un ensemble uGPAS, la définition de presque uGPAS (*almost uGPAS*) inclut trois propriétés :

- bornitude uniforme des solutions par rapport à un ensemble \mathcal{A} .
- Stabilité uniforme de l'ensemble \mathcal{A} .
- Convergence pratique uniforme (*uniform practical convergence*) vers l'ensemble \mathcal{A} .

5.3 Solutions U-bornées des réseaux de systèmes non linéaires

Afin d'analyser le comportement du réseau à couplage diffusif, nous reformulons les conditions qui assurent les solutions U-bornées (Ultimately bounded) des réseaux de systèmes non linéaires (5.11), (5.12). Ce qui peut se traduire de manière peu formelle par le fait que les solutions peuvent arriver à être contenues dans un domaine borné. Plus précisément, suivant [73], nous définissons les solutions U-bornées comme suit.

Définition 5.3.1 *Les solutions du système $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ sont dites U-bornées (Ultimately bounded) si il existe deux constantes positives Δ_0 et c telles que pour tout $\Delta \in]0, \Delta_0[$, il existe une constante positive $T(\Delta)$, telle que pour tout $\mathbf{x}_0 \in B_\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq \Delta\}$ l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| \leq c \quad \forall t \geq T.$$

Si cette borne est valable pour Δ_0 arbitrairement large, alors les solutions sont globalement U-bornées.

Le résultat suivant, qui est une adaptation du corolaire 1 dans [99], donne les conditions pour lesquelles les solutions du système (5.11), (5.12) sont U-bornées.

Proposition 4 *Considérons le réseau de N éléments à couplage diffusif (5.11), (5.12) satisfaisant l'hypothèse 2. Soit le graphe d'interconnexion du réseau non orienté et connecté et tous les éléments sont strictement semi-passifs, alors les solutions du système (5.11), (5.12) sont U-bornées.*

Preuve

La preuve suit une démarche similaire au lemme 1 dans [99] et à la proposition 2.1 dans [108]. A partir de l'hypothèse 2 satisfaite, tous les éléments sont strictement semi-passifs et il existe une fonction de stockage $V_i(\mathbf{x}_i)$ définie positive et radialement non bornée, une constante positive ρ_i , une fonction continue $H_i(\cdot)$ et une fonction continue positive $\varrho_i(\cdot)$ telles que

$$\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq \mathbf{y}_i^T \mathbf{u}_i - H_i(\mathbf{x}_i) \quad (5.24)$$

avec $H_i(\mathbf{x}_i) \geq \varrho_i(\|\mathbf{x}_i\|)$ pour tout $\|\mathbf{x}_i\| \geq \rho_i$. Notons

$$V_\Sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{x}_i),$$

où nous rappelons que $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_N^T)^T$. Alors, en prenant la dérivée de $V_\Sigma(\mathbf{x})$ le long des trajectoires du système (5.11), (5.12), nous obtenons

$$\dot{V}_\Sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq -\sigma \mathbf{y}^T (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{y} - \sum_{i=1}^N H_i(\mathbf{x}_i) \leq - \sum_{i=1}^N H_i(\mathbf{x}_i), \quad (5.25)$$

Pour la dernière inégalité nous utilisons le fait qu'une matrice laplacienne est toujours semi-définie positive.

Notons $\bar{\rho} = \max_{1 \leq i \leq N} \{\rho_i\}$, alors pour tout $s \geq \bar{\rho}$, nous pouvons définir une fonction $\bar{\varrho} : [\bar{\rho}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ comme $\bar{\varrho}(s) = \min_{1 \leq i \leq N} \{\varrho_i(s)\}$. Il est aisé de voir que la fonction $\bar{\varrho}(\cdot)$ est continue et positive pour tout $s \geq \bar{\rho}$. Alors, en utilisant les définitions des fonctions $\bar{\varrho}(\cdot)$ et (5.24), nous obtenons que quelque soit $\|\mathbf{x}\| \geq N\bar{\rho}$, il existe un $k \in \mathcal{I}$ tel que $\|\mathbf{x}_k\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}\|\mathbf{x}\| \geq \bar{\rho}$ et donc nous avons pour tout $\|\mathbf{x}\| \geq N\bar{\rho}$

$$\sum_{i=1}^N H_i(\mathbf{x}_i) \geq H_k(\mathbf{x}_i) \geq \bar{\varrho}(\|\mathbf{x}_k\|) \geq \bar{\varrho}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\|\mathbf{x}\|\right).$$

En combinant la borne précédente et (5.25) nous obtenons que pour tout $\|\mathbf{x}\| \geq N\bar{\rho}$

$$\dot{V}_\Sigma(\mathbf{x}) \leq -\bar{\varrho}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\|\mathbf{x}\|\right)$$

par conséquent, en utilisant le théorème 10.4 dans [126] nous pouvons conclure que les solutions du système (5.11), (5.12) sont U-bornées. \square

Remarque 8 Si le graphe du réseau est non orienté mais pas nécessairement connecté le résultat de la proposition 4 est toujours valide, mais l'analyse de ce type de réseau va au-delà des objectifs de ces travaux de thèse.

5.4 Changement de coordonnées du réseau en une fonction de graphe d'interconnexion

Dans ce qui suit, pour clarifier notre approche de la synchronisation du réseau non linéaire (5.11), (5.12), nous réécrivons le système sous une forme plus convenable pour notre sujet.

5.4.1 Décomposition de la matrice laplacienne

Si le graphe du réseau est non orienté et connecté alors la matrice laplacienne $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$ a une seule valeur propre égale à zéro $\lambda_1 = 0$, le vecteur propre gauche \mathbf{v}_{g1} et le vecteur propre droit \mathbf{v}_{d1} correspondants sont égaux et par ailleurs, $\mathbf{v}_{g1} = \mathbf{v}_{d1} = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}$ (se référer à la section 3.1).

A partir du fait que la matrice laplacienne \mathbf{L} est symétrique et positive, il existe une matrice orthogonale \mathbf{U} telle que la matrice \mathbf{L} peut être représentée sous la forme (se reporter à [5], Chapitre 4, théorèmes 2 et 3)

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix} \mathbf{U}^T, \quad (5.26)$$

où $\lambda_i > 0$ avec $i \in \{2, \dots, N\}$, sont les valeurs propre de la matrice \mathbf{L} . De manière équivalente, nous avons

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^T \mathbf{L} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix}.$$

D'autre part, la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{U} est un vecteur propre de la matrice laplacienne \mathbf{L} correspondant à la $i^{\text{ème}}$ valeur propre $\lambda_i(\mathbf{L})$. Puisque le premier vecteur propre $\mathbf{v}_1(\mathbf{L}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}$, nous pouvons présenter la matrice \mathbf{U} dans la forme suivante

$$\mathbf{U} = \left[\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}, \mathbf{U}_1 \right], \quad (5.27)$$

où $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ est une matrice composée de $N - 1$ vecteurs propres de \mathbf{L} correspondant aux valeurs propres $\lambda_2, \dots, \lambda_N$. A partir du fait que les vecteurs propres d'une matrice réelle symétrique sont toujours orthogonaux, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}^T \mathbf{U}_1 = 0, \quad \mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_1 = \mathbf{I}_{N-1}.$$

5.4.2 Changement de coordonnées

En se basant sur la matrice orthogonale \mathbf{U} , nous introduisons le changement de coordonnées qui suit :

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathcal{U}\mathbf{x} \quad (5.28)$$

où la matrice $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ est définie par

$$\mathcal{U} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_n. \quad (5.29)$$

A partir de (5.29), il est aisé de voir que la matrice \mathcal{U} est aussi orthogonale. Par ailleurs, en utilisant (5.27) nous pouvons décomposer les nouvelles coordonnées en deux parties comme suit :

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}^T \\ \mathbf{U}_1^T \end{array} \right] \otimes \mathbf{I}_n \right) \mathbf{x}.$$

En réordonnant les variables de $\bar{\mathbf{x}}$ nous pouvons diviser le vecteur $\bar{\mathbf{x}}$ en deux parties comme suit :

$$\bar{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n \\ \mathbf{U}_1^T \otimes \mathbf{I}_n \end{array} \right] \mathbf{x}. \quad (5.30)$$

Les nouvelles coordonnées $\bar{\mathbf{x}}_1$ et $\bar{\mathbf{x}}_2$ que nous avons obtenues avec une telle transformation sont telles que le vecteur $\bar{\mathbf{x}}_1$ coïncide avec le vecteur $\sqrt{N}\mathbf{x}_s$ qui définit l'élément moyen du réseau.

A présent, nous considérons le vecteur $\bar{\mathbf{x}}_2$. Notons $\mathcal{U}_1 = \mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{I}_n$, alors $\mathcal{U}_1^T = \mathbf{U}_1^T \otimes \mathbf{I}_n$. A partir de

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T = \mathbf{I}_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T, \quad (5.31)$$

nous avons

$$\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_1^T = (\mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{U}_1^T \otimes \mathbf{I}_n) = (\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T) \otimes \mathbf{I}_n = \left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \right) \otimes \mathbf{I}_n, \quad (5.32)$$

où nous utilisons l'équation (5.31) pour $\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T$ et l'égalité

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}. \quad (5.33)$$

En multipliant $\bar{\mathbf{x}}_2$ par \mathcal{U}_1 et en utilisant (5.32) nous obtenons que $\bar{\mathbf{x}}_2$ est égale à zéro si et seulement si $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{N}}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\mathbf{x}}_1$, ou encore de manière équivalente si $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \frac{1}{\sqrt{N}}(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{0}$. Nous pouvons donc voir les deux vecteurs $\bar{\mathbf{x}}_2$ et \mathbf{e} comme une mesure de synchronisation entre les éléments du réseau.

En combinant les représentations de $\bar{\mathbf{x}}_1$ et $\bar{\mathbf{x}}_2$ nous voyons que cette transformation permet de décomposer explicitement le comportement du système en deux parties dont chacune tient un rôle :

- Les coordonnées $\bar{\mathbf{x}}_1$ (\mathbf{x}_s) correspondent à la moyenne des éléments (que nous appellerons élément moyen).
- Les coordonnées $\bar{\mathbf{x}}_2$ représentent l'erreur de synchronisation entre les éléments du réseau et l'élément moyen.

Dans ce qui suit cette section, nous utiliserons les coordonnées $\mathbf{x}_s = \sqrt{N}\bar{\mathbf{x}}_1$ et

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \frac{1}{\sqrt{N}}(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x} - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}_s \quad (5.34)$$

pour analyser la stabilité du réseau des systèmes non linéaires (5.11), (5.12).

5.5 Écriture des dynamiques du réseau avec les nouvelles coordonnées

Nous reformulons dans cette section les dynamiques du système (5.11), (5.12) en utilisant les coordonnées \mathbf{x}_s et \mathbf{e} que nous utiliserons par la suite pour l'analyse de la stabilité du réseau.

5.5.1 Dynamiques de l'élément moyen

A partir de la définition de l'élément moyen $\mathbf{x}_s = \frac{1}{N}(\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}$ et à partir des dynamiques du réseau (5.11), (5.12), nous obtenons

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \frac{1}{N}(\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m)\mathbf{y}, \quad (5.35)$$

nous rappelons que $\mathbf{E}_m = [\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{(n-m) \times m}]^T$.

En utilisant les propriétés de la multiplication du produit de Kronecker (5.33) et l'égalité $\mathbf{1}^T \mathbf{L} = \mathbf{0}$, nous avons

$$(\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) = (\mathbf{1}^T \mathbf{L}) \otimes (\mathbf{I}_n \mathbf{E}) = \mathbf{0}. \quad (5.36)$$

Par conséquent, les dynamiques de l'élément moyen sont indépendantes du gain d'interconnexion σ . Donc, à partir de (5.35), (5.36) et en utilisant (5.10) nous obtenons les dynamiques de \mathbf{x}_s telles que

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \frac{1}{N}(\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_s) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_s)).$$

En notant $\mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_s)$ et en utilisant le fait que $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i + \mathbf{x}_s$ (voir (5.34)) nous avons

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_s)) = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \frac{1}{N}(\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n)\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s).$$

où

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1) - \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_s) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N(\mathbf{x}_N) - \mathbf{F}_N(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{x}_s) - \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_s) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N(\mathbf{e}_N + \mathbf{x}_s) - \mathbf{F}_N(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Notons

$$\mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_s)). \quad (5.38)$$

Nous écrivons finalement les dynamiques \mathbf{x}_s comme

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) \quad (5.39)$$

Comme les fonctions $\mathbf{F}_i(\cdot)$ ($i \in \mathcal{I}$) sont localement Lipschitz, les fonctions $\tilde{\mathbf{F}}(\cdot)$ et $\mathbf{G}_s(\cdot)$ sont également localement Lipschitz suivant les deux arguments et de plus il existe des fonctions continues, positives et non décroissantes $k_1, k_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que

$$\|\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s)\| \leq k_1(\|\mathbf{e}\|, \|\mathbf{x}_s\|)\|\mathbf{e}\|, \quad (5.40)$$

$$\|\mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s)\| \leq k_2(\|\mathbf{e}\|, \|\mathbf{x}_s\|)\|\mathbf{e}\|. \quad (5.41)$$

Afin de simplifier les notations nous noterons la sortie de l'élément moyen \mathbf{x}_s par \mathbf{y}_s , c'est-à-dire

$$\mathbf{y}_s = [\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m \times (n-m)}] \mathbf{x}_s = \mathbf{E}_m^T \mathbf{x}_s. \quad (5.42)$$

Pour résumer, les dynamiques de l'élément moyen \mathbf{x}_s sont décrites par les équations (5.39), (5.38) qui peuvent être vues comme une perturbation des dynamiques nominales de l'élément moyen $\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{e})$ par l'erreur de synchronisation du réseau.

5.5.2 Dynamiques des erreurs de synchronisation

A partir de la définition de l'erreur de synchronisation suivante

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}_s,$$

et à partir des dynamiques du réseau (5.11), (5.12) nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= -\sigma (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) \mathbf{y} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) [\mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s)] \\ &= -\sigma (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) \mathbf{y} + [\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_s)] + [\mathbf{F}(\mathbf{x}_s) - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s))] \\ &= -\sigma (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) + [\mathbf{F}(\mathbf{x}_s) - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s)], \end{aligned}$$

où nous utilisons (5.37) pour le second terme. Finalement, nous pouvons écrire

$$\dot{\mathbf{e}} = -\sigma (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) \mathbf{y} + \left[\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) \right] + \Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}_s), \quad (5.43)$$

pour laquelle nous introduisons la notation suivante

$$\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) \quad (5.44)$$

A partir de la définition (5.10) de la fonction $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ nous pouvons réécrire ce terme comme suit

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_s) - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) - \frac{1}{N} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{P} \mathbf{F}(\mathbf{x}_s)$$

où la matrice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ est définie par

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_{nN} - \frac{1}{N}(\mathbf{1}\mathbf{1}^T) \otimes \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_n - \frac{1}{N}(\mathbf{1}\mathbf{1}^T) \otimes \mathbf{I}_n = (\mathbf{I}_N - \frac{1}{N}(\mathbf{1}\mathbf{1}^T)) \otimes \mathbf{I}_n.$$

A présent considérons séparément les deux premiers termes qui apparaissent dans l'équation des dynamiques du réseau (5.43).

1. *Premier terme : $\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m \mathbf{y}$*

A partir de la définition de l'état et de la sortie du réseau nous avons

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I}_N \otimes [\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m \times (n-m)}]) \mathbf{x} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_m^T) \mathbf{x}$$

et donc

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m \mathbf{y} = (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_m^T) \mathbf{x} = (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m \mathbf{E}_m^T) \mathbf{x}.$$

alors, en utilisant (5.34) pour exprimer \mathbf{x} en termes de \mathbf{e} et de \mathbf{x}_s nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m \mathbf{y} &= (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m \mathbf{E}_m^T) (\mathbf{e} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n \mathbf{x}_s) = (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m \mathbf{E}_m^T) \mathbf{e} + (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m \mathbf{E}_m^T) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}_s \\ &= (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m \mathbf{E}_m^T) \mathbf{e} + (\mathbf{L}\mathbf{1}) \otimes (\mathbf{E}_m \mathbf{E}_m^T) \mathbf{x}_s = (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m \mathbf{E}_m^T) \mathbf{e}, \end{aligned}$$

où à la dernière égalité nous utilisons le fait que $\mathbf{L}\mathbf{1} = \mathbf{0}$. En notant l'erreur de sortie par

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{y} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{y}_s, \quad (5.45)$$

nous pouvons finalement écrire

$$(\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) \mathbf{y} = (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) \mathbf{e}_y. \quad (5.46)$$

2. *Second terme : $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s)$*

Par la définition de l'équation (5.38), nous avons $\mathbf{G}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s)$ et en utilisant les propriétés de multiplication du produit de Kronecker (voir équation (5.33)) nous avons

$$\frac{1}{N} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}\mathbf{1}^T) \otimes \mathbf{I}_n$$

et

$$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}\mathbf{1}^T) \otimes \mathbf{I}_n \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s).$$

Donc

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) = \left(\mathbf{I}_{nN} - \frac{1}{N} (\mathbf{1}\mathbf{1}^T) \otimes \mathbf{I}_n \right) \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s), \quad (5.47)$$

où nous rappelons que $\mathbf{P} = \mathbf{I}_{nN} - \frac{1}{N} (\mathbf{1}\mathbf{1}^T) \otimes \mathbf{I}_n$.

En combinant les expressions (5.43), (5.44), (5.47) et (5.46) nous réécrivons finalement les dynamiques (5.43) comme

$$\dot{\mathbf{e}} = -\sigma (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) \mathbf{e}_y + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) + \Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}_s)$$

Cette façon de représenter l'erreur des dynamiques implique trois termes :

1. Le terme $-\sigma (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) \mathbf{e}_y$ qui représente l'effet du couplage diffusif entre les éléments.
2. Le terme $\tilde{\mathbf{F}}(\cdot)$ qui disparaît quand $\mathbf{e} = 0$.
3. Le terme $\Delta \mathbf{F}(\cdot)$ qui représente les variations entre les dynamiques des éléments individuels \mathbf{x}_i et les dynamiques de l'élément moyen \mathbf{x}_s .

La section suivante est dédiée à l'analyse de la stabilité de réseaux d'éléments (5.11), (5.12). Nous utiliserons la représentation des dynamiques du réseau en coordonnées \mathbf{e} et \mathbf{x}_s qui, pour plus de clarté sont regroupées ici :

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s), \quad (5.48)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = -\sigma (\mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) \mathbf{e}_y + \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) + \Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}_s). \quad (5.49)$$

5.6 Analyse de la stabilité de réseaux de systèmes à couplage diffusif

Dans cette section, nous nous concentrerons dans un premier temps sur comment le couplage diffusif peut affecter la synchronisation du réseau (5.11) et (5.12), puis comment la synchronisation de ce réseau peut contribuer à l'émergence d'un comportement commun. Dans le premier cas, nous nous intéresserons à l'analyse du sous-système (5.49), alors que dans le second cas nous analyserons le sous-système (5.48).

Tout au long de cette section nous supposons que les hypothèses 1 à 3 sont satisfaites.

Le résultat suivant peut être déduit de [32] et est la clé de la suite de notre analyse.

Theorème 4 *Considérons le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{f}(\cdot)$ est une fonction continue et localement Lipschitz. Supposons que les solutions du système existent pour tout $t \geq 0$ (le système est donc forward-complete), il existe un ensemble fermé $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^n$, une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^1 , des fonctions $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha_3 \in \mathcal{K}$ ainsi qu'une constante $c > 0$ tels que l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{Z}}) &\leq V(\mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{Z}}) \\ \dot{V} &\leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{Z}}) + c. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $R, \epsilon > 0$ il existe $T = T(R, \epsilon)$ tel que pour tout $t \geq T$ et pour tout $\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{Z}} \leq R$, on a :

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{Z}} \leq r + \epsilon,$$

où $r = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1}(c)$.

5.6.1 Analyse de la stabilité de l'ensemble synchronisé S_y et S_x

Dans cette section est reporté l'analyse de la stabilité des ensembles S_x et S_y . Sont également reportés les conditions qui assurent à ces ensembles d'être globalement PAS (*globalement Pratiquement Asymptotiquement Stables*) ce qui implique que le réseau est pratiquement synchronisé ou pratiquement synchronisé en sortie.

Cette analyse commence par l'étude du cas où le réseau est synchronisé en sortie.

Theorème 5 Soit le système (5.11), (5.12) et soit les hypothèses 1, 2 satisfaites. Alors le système est forward complete et de plus l'ensemble $\mathcal{S}_y = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN} : \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_s = \dots, \mathbf{y}_N - \mathbf{y}_s = 0\}$ est UGPAS.

Preuve

Soit le système (5.11), (5.12) pour les conditions initiales \mathbf{x}_o et soit \mathbf{x}_o telle que $\|\mathbf{x}_o\| \leq R$, où $R > 0$ est une constante arbitraire. L'existence et l'unicité des solutions en un intervalle de temps fini vient du fait que la fonction du membre de droite de l'égalité est lisse. De part la proposition 4, toutes les solutions sont U-bornées et donc le système est forward complete. De plus, à partir de cette bornitude des solutions il existe une constante $B_x > 0$ et une constante $T = T(R) > 0$ telles que

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o)\| \leq B_x \quad \text{pour tout } t \geq T. \quad (5.50)$$

Soit les dynamiques du systèmes écrites en termes d'erreur de synchronisation \mathbf{e} , équation (5.49), et soit la fonction de Lyapunov définie pour ce système $V_y : \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R}_+$ comme $V_y(\mathbf{e}_y) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_y$ où nous rappelons que

$$\mathbf{e}_y = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_m^T) \mathbf{e} = (\mathbf{I}_N \otimes [\mathbf{I}_m, 0_{m \times (n-m)}]) \mathbf{e}.$$

En prenant la dérivée de $V_y(\mathbf{e}_y)$ le long des trajectoires de (5.49) nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}_y(\mathbf{e}_y) &= \mathbf{e}_y^T (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_m^T) \dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{e}_y^T (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_m^T) (\sigma \mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y^T (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_m^T) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) \\ &+ \mathbf{e}_y^T (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_m^T) \Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_m^T) (\sigma \mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m) = \sigma \mathbf{L} \otimes \mathbf{E}_m^T \mathbf{E}_m = \sigma \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m$ nous pouvons borner la dérivée de la fonction de Lyapunov $V_y(\mathbf{e}_y)$ par

$$\begin{aligned} \dot{V}_y(\mathbf{e}_y) &\leq -\sigma \mathbf{e}_y^T (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{e}_y + \|\mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s)\| \|\mathbf{e}_y\| + \|\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}_s)\| \|\mathbf{e}_y\| \\ &\leq -\sigma \lambda_2(\mathbf{L}) \|\mathbf{e}_y\|^2 + \left(\|\mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s)\| + \|\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}_s)\| \right) \|\mathbf{e}_y\|, \end{aligned}$$

où à la deuxième inégalité nous utilisons les propriétés de la matrice laplacienne et la définition du vecteur $\mathbf{e}_y = \mathbf{y} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{y}_s$.

Puisque les solutions du système sont U-bornées et en utilisant (5.40), (5.44) et (5.50), nous pouvons conclure qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $t \geq T$ l'inégalité suivante est valable

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s)\| &\leq C_1 \|\mathbf{e}_y\| \\ \|\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}_s)\| &\leq C_2 \end{aligned}$$

et donc nous avons

$$\dot{V}_y(\mathbf{e}_y) \leq -(\sigma \lambda_2(\mathbf{L}) - C_1) \|\mathbf{e}_y\|^2 + C_2 \|\mathbf{e}_y\| \leq -\left(\sigma \lambda_2(\mathbf{L}) - C_1 - \frac{C_2}{2} \right) \|\mathbf{e}_y\|^2 + \frac{C_2}{2},$$

où pour la dernière inégalité nous utilisons $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$. Notons que les constantes C_1 et C_2 sont indépendantes de σ et dépendent seulement des fonctions $\tilde{\mathbf{F}}(\cdot)$, $\Delta \mathbf{F}(\cdot)$ et de la constante B_x . Alors, en notant $C = C_1 + \frac{C_2}{2}$ nous obtenons que pour tout gain d'interconnexion σ tel que

$$\sigma \geq \sigma^* = C / \lambda_2(\mathbf{L})$$

, la dérivée de la fonction de Lyapunov satisfait l'inégalité

$$\dot{V}_y(\mathbf{e}_y) \leq -\frac{1}{2}\sigma\lambda_2(\mathbf{L})\|\mathbf{e}_y\|^2 + \frac{C_2}{2}. \quad (5.51)$$

Par la suite, en appliquant le théorème 4 avec l'ensemble \mathcal{Z} défini par $\mathcal{Z} = \mathcal{S}_y$, $\alpha_1(s) = \alpha_2(s) = \frac{1}{2}s^2$ et $\alpha_3(s) = \frac{1}{2}\sigma\lambda_2(\mathbf{L})s^2$ on obtient que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $T = T(\epsilon) > 0$ tel que

$$\|\mathbf{e}_y(t, \mathbf{x}_o)\| \leq r + \epsilon,$$

où $r = \sqrt{C_2/\sigma\lambda_2(\mathbf{L})}$.

A partir du fait que la dernière borne est inversement proportionnelle à σ nous avons $r \rightarrow 0$ pour $\sigma \rightarrow +\infty$ et donc l'ensemble est UGPAS. \square

Si l'interconnexion entre les éléments du réseau dépend de l'état plutôt que d'une sortie, c'est-à-dire que $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, alors d'après le théorème précédent le réseau à couplage diffusif est pratiquement synchronisé pour un couplage diffusif par l'état.

Corollaire 1 *Soit le système (5.11) et (5.12). Soit les hypothèses 1, 2 satisfaites et $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Alors le système est forward complete et l'ensemble $\mathcal{S}_x = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN} : \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_s = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_s = \dots = \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_s = 0\}$ est UGPAS.*

Preuve

La preuve du corollaire vient directement de l'application du théorème 5 pour la sortie $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ et donc pour $\mathbf{e}_y = \mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s = \mathbf{e}$. \square

De manière simplifiée, les résultats présentés ci-dessus exploitent seulement deux propriétés des systèmes en réseau, notamment la valeur négative de la deuxième plus petite valeur propre de la matrice laplacienne \mathbf{L} et des propriétés issues de la semi-passivité des éléments du réseau qui assurent l'uniformité de la bornitude des trajectoires du système (5.11), (5.12). Par la suite, nous affinons ces résultats et donnons une meilleure estimation du comportement du réseau en exploitant également l'hypothèse 3 concernant les propriétés des zéros dynamiques des réseaux. En particulier, nous montrons que dans ce cas le réseau est pratiquement synchronisé en sortie tandis que la borne supérieure de l'erreur de l'état \mathbf{e} de synchronisation dépend de l'écart entre les dynamiques de l'élément moyen et celles des éléments du réseau.

Théorème 6 *Soit le système (5.11), (5.12) avec les hypothèses 1 à 3. Alors le système est forward complete de plus l'ensemble $\mathcal{S}_y = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN} : \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_s = \dots, \mathbf{y}_N - \mathbf{y}_s = 0\}$ est UGPAS. D'autre part, il existe une fonction $\beta \in \mathcal{K}_\infty$ telle que pour tout $\epsilon \geq 0$ et pour toutes les conditions initiales contenues dans une boule $B_r = \{\mathbf{x}_o : \|\mathbf{x}_o\| \leq R\}$ il existe une constante $T^* > 0$ et une constante $\sigma > 0$ telles que pour tout $t \geq T^*$, l'erreur de synchronisation satisfait la borne suivante*

$$\|\mathbf{e}(t, \mathbf{x}_o)\| \leq \beta(\Delta f), \quad (5.52)$$

où

$$\Delta f = \max_{\|\mathbf{x}\| \leq B_x} \max_{1 \leq k \leq N} \{\|\mathbf{f}_k^2(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_s^2(\mathbf{x})\|\}. \quad (5.53)$$

Dans le cas où les zéros dynamiques des éléments sont identiques et donc $\Delta f = 0$, d'après le théorème 6, le réseau est pratiquement synchronisé.

Corollaire 2 Soit le système (5.11), (5.12) et soit les hypothèses 1 à 3 satisfaites. Supposons que les fonctions $\mathbf{f}_i^2(\cdot)$ qui définissent les zéros dynamiques des éléments du réseau sont identiques c'est-à-dire $\mathbf{f}_i^2(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_j^2(\mathbf{x})$ pour tout $(i, j) \in 1, \dots, N^2$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN}$ alors l'ensemble $\mathcal{S}_x = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN} : \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_s = \dots, \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_s = 0\}$ est UGPAS.

Avant de présenter la preuve du théorème précédent nous introduisons deux résultats techniques sous forme de lemme qui jouent un rôle crucial dans l'analyse de réseaux.

5.6.1.1 Deux lemmes pour la preuve du théorème 6

Lemme 3 Soit les scalaires positifs ou nuls s_1, s_2, \dots, s_N choisis arbitrairement. Alors pour toute fonction $\alpha(\cdot)$ de classe \mathcal{K}_∞ l'inégalité suivante est valable

$$\alpha\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \alpha(s_i) \leq N\alpha\left(\sum_{i=1}^N s_i\right) \quad (5.54)$$

Preuve

Soit $s_k = \max_{i=1, \dots, N} \{s_i\}$ alors $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i \leq s_k$ et donc

$$\alpha\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i\right) \leq \alpha(s_k) \leq \alpha\left(\sum_{i=1}^N s_i\right),$$

ce qui prouve la première inégalité.

De manière équivalente pour la deuxième inégalité nous avons

$$\sum_{i=1}^N \alpha(s_i) \leq N\alpha(s_k) \leq N\alpha\left(\sum_{i=1}^N s_i\right).$$

□

Lemme 4 Soit les vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^n$ et soit le vecteur $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$. Notons² $\mathbf{x}_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i = \frac{1}{N} (\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{x}) \mathbf{1}$, $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ et définissons $\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}$ et $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{nN^2}$ par

$$\mathbf{X} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_1 \end{bmatrix},$$

Alors les égalités suivantes sont valables

$$\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} = 2N(\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s)^T (\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s) \quad (5.55)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (5.56)$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s)^T (\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (5.57)$$

²Le vecteur $\mathbf{1}$ est de dimension N .

Preuve

I. Tout d'abord, considérons l'égalité (5.55). Dans un premier temps, nous rappelons que pour toute matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r \times s}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{s \times t}$, la transposition et la multiplication du produit de Kronecker satisfont l'égalité suivante

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}.\end{aligned}$$

Alors, les calculs montrent que

$$\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^T \mathbf{X} + \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

En considérant séparément les termes de la dernière somme nous obtenons

1.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = (\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{x}^T)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}) = (\mathbf{1}_N^T \mathbf{1}) \otimes \mathbf{x}^T \mathbf{x} = N \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

2.

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = [\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{1}^T \otimes \mathbf{x}_N^T] \begin{bmatrix} \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{x}_i^T)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_i) \quad (5.58)$$

$$= \sum_{i=1}^N \mathbf{1}^T \mathbf{1} \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = N \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = N \mathbf{x}^T \mathbf{x} \quad (5.59)$$

3.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} = [\mathbf{x}^T, \dots, \mathbf{x}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T (\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_i).$$

En considérant uniquement le terme $\mathbf{x}^T (\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_i)$ nous obtenons

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_i) = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_N^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_i = \left(\sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \right)^T \mathbf{x}_i = N \mathbf{x}_s^T \mathbf{x}_i$$

En substituant l'expression ainsi obtenue dans (5.60) nous obtenons

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} = N \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_s^T \mathbf{x}_i = N \mathbf{x}_s^T \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \right) = N^2 \mathbf{x}_s^T \mathbf{x}_s.$$

En combinant les expressions de $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ et $\mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ nous avons finalement

$$\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} = 2N \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2N^2 \mathbf{x}_s^T \mathbf{x}_s. \quad (5.60)$$

D'un autre côté nous avons

$$(\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s)^T (\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s) = (\mathbf{x}^T - \mathbf{1}^T \otimes \mathbf{x}_s^T)(\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s) \quad (5.61)$$

$$= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T (\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s) + (\mathbf{x}_s^T \mathbf{x}_s)(\mathbf{1}^T \mathbf{1}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - N \mathbf{x}_s^T \mathbf{x}_s. \quad (5.62)$$

En comparant (5.60) et (5.62) nous obtenons le résultat.

II. A partir de la définition de $\tilde{\mathbf{X}}$ nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} &= [\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_N] \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_i)^T (\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_i),\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que pour les vecteurs $\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_N$ ($i \in \mathcal{I}$), nous obtenons

$$(\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_i)^T (\mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i).$$

En combinant les deux dernières bornes nous obtenons (5.56).

III. La dernière égalité (5.57) se déduit simplement des égalités (5.55) et (5.56). □

5.6.1.2 Preuve du théorème 6

A partir du fait que toutes les hypothèses du théorème 5 sont satisfaites, l'ensemble \mathcal{S}_y est UGPAS.

Ensuite, comme pour le théorème 5, nous fixons une constante $R > 0$ et nous considérons le système (5.11), (5.12) pour les conditions initiales \mathbf{x}_o telles que $\|\mathbf{x}_o\| \leq R$. A partir du théorème 4 il existe deux constantes strictement positives B_x et $T = T(R)$ telles que pour tout $t \geq T$ nous avons $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o)\| \leq B_x$. Dans la suite de la preuve nous considérons $t \geq T$.

A partir de (5.11) les dynamiques des coordonnées \mathbf{z} sont données par

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{f}_i^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i), \quad i \in \mathcal{I}. \quad (5.63)$$

En utilisant l'hypothèse 3 nous définissons la fonction de Lyapunov continument dérivable $V_z : \mathbb{R}^{(n-m)N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ pour ce système comme

$$V_z(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N V_{ok}(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i). \quad (5.64)$$

Proposition 5 *Il existe des fonctions $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ telles que la fonction de Lyapunov $V_z(\mathbf{z})$ définie dans (5.64) satisfait les bornes suivantes*

$$\gamma_1(\|\mathbf{e}_z\|) \leq V_z(\mathbf{z}) \leq \gamma_2(\|\mathbf{e}_z\|),$$

où $\mathbf{e}_z = \mathbf{E}_{n-m}^T \mathbf{e} = [\mathbf{0}_{(n-m) \times m}, \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{e}$.

Preuve de la proposition 5

A partir de l'hypothèse 3 il existe des fonctions $\overline{\alpha}_i^1, \overline{\alpha}_i^2$, ($i \in \mathcal{I}$) de classe \mathcal{K}_∞ telles que les fonctions $V_{oi}(\cdot)$ satisfont les bornes pour tout $z_i \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{\alpha}_i^1(\|z_i\|) \leq V_{oi}(z_i) \leq \overline{\alpha}_i^2(\|z_i\|).$$

Donc, à partir de

$$V_{ok}(\|z_k - z_i\|) \geq \overline{\alpha}_k^1(\|z_k - z_i\|),$$

nous obtenons la borne inférieure de la fonction V_z comme suit

$$V_z(\|z\|) \geq \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \overline{\alpha}_k^1(\|z_k - z_i\|) \right).$$

Soit la fonction $\gamma^1(s) = \min_{1 \leq k \leq N} \left\{ \overline{\alpha}_k^1, k \in \mathcal{I} \right\}$. La fonction ainsi définie est $\gamma^1 \in \mathcal{K}_\infty$ car toutes les fonctions $\overline{\alpha}_k^1 \in \mathcal{K}_\infty$. Alors nous pouvons écrire

$$V_z(z) \geq \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \gamma^1(\|z_k - z_i\|) \right).$$

Ensuite, nous définissons la fonction $\bar{\gamma}^1(s)$ comme

$$\bar{\gamma}^1(s) = \gamma^1 \left(\frac{1}{N^2} \beta^{-1}(s) \right),$$

où $\beta(s) = s^2$. A partir des deux fonctions β et $\gamma^1 \in \mathcal{K}_\infty$, la fonction $\bar{\gamma}^1 \in \mathcal{K}_\infty$. Alors, en utilisant le lemme 3 nous pouvons borner par une borne inférieure la fonction V_z comme suit

$$\begin{aligned} V_z(z) &\geq \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \bar{\gamma}^1(\|z_k - z_i\|^2) \right) \geq \sum_{k=1}^N \bar{\gamma}^1 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|z_k - z_i\|^2 \right) \\ &\geq \bar{\gamma}^1 \left(\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \|z_k - z_i\|^2 \right) = \bar{\gamma}^1 \left(\frac{1}{N^2} \|z - \mathbf{1} \otimes z_s\|^2 \right) = \bar{\gamma}^1 \left(\frac{1}{N^2} \|e\|_z^2 \right) = \gamma_1(\|e_z\|). \end{aligned}$$

En utilisant exactement la même démarche nous pouvons montrer qu'il existe une fonction $\gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ telle que $V_z(z) \leq \gamma_2(\|e_z\|)$.

La proposition est prouvée.

□

En prenant la dérivée de la fonction de Lyapunov $V_z(z)$ le long des trajectoires du système (5.63) nous obtenons

$$\dot{V}_z(z) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \dot{V}_{ok}(z_k - z_i).$$

En considérant séparément les termes de la dernière somme nous pouvons borner les termes $\dot{V}_{ok}(z_k - z_i)$ comme suit

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ok}(z_k - z_i) &= \nabla V_{ok}(z_k - z_i) (f_k^2(z_k, y_k) - f_i^2(z_i, y_i)) \\ &= \nabla V_{ok}(z_k - z_i) (f_k^2(z_k, y_k) - f_k^2(z_i, y_k) + f_k^2(z_i, y_k) - f_i^2(z_i, y_i)) \\ &\leq -\alpha_k \|z_k - z_i\|^2 + \nabla V_{ok}(z_k - z_i) (f_k^2(z_i, y_k) - f_i^2(z_i, y_i)) \\ &\leq -\alpha_k \|z_k - z_i\|^2 + \nabla V_{ok}(z_k - z_i) (f_k^2(z_i, y_k) - f_k^2(z_i, y_i)) \\ &\quad + \nabla V_{ok}(z_k - z_i) (f_k^2(z_i, y_i) - f_i^2(z_i, y_i)) \end{aligned} \tag{5.65}$$

De part le fait que les solutions sont U-bornées et que les fonctions V_{ok} sont de classe C^2 , il existe une constante $C_o > 0$ telle que pour tout $\|\mathbf{x}\| \leq B_x$ nous avons pour tout $k \in \mathcal{I}$

$$\|\nabla V_{ok}(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i)\| \leq C_o \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i\|.$$

Aussi, à partir des fonctions $\mathbf{f}_i^2(\cdot)$ localement Lipschitz il existe une fonction continue, strictement positive non-décroissante $k_z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $k \in \mathcal{I}$

$$\|\mathbf{f}_k^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_k) - \mathbf{f}_k^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i)\| \leq k_z(\|\mathbf{x}\|) \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_i\|.$$

En utilisant le fait que les solutions de (5.11), (5.12) sont U-bornées nous pouvons borner ces différences par

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_k^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_k) - \mathbf{f}_k^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i)\| &\leq k_z(B_x) \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_i\| \leq C_z \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_i\| \\ &= C_z \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_s + \mathbf{y}_s - \mathbf{y}_i\| \\ &\leq C_z (\|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_s\| + \|\mathbf{y}_s - \mathbf{y}_i\|) = 2C_z \|\mathbf{e}_y\|, \end{aligned}$$

où $C_z = k_z(B_x)$.

Soit

$$\Delta f = \max_{\|\mathbf{x}\| \leq B_x} \max_{1 \leq k \leq N} \|\mathbf{f}_k^2(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_s^2(\mathbf{x})\|.$$

Cette constante représente le décalage maximum entre les dynamiques des éléments individuels du réseau et celles de l'élément moyen dans le domaine borné. Elle est définie par les propriétés du système U-bornées. Notons que dans le cas où tous les zéros dynamiques des éléments du réseau sont identiques alors nous avons $\Delta f = 0$

De la définition des écarts des dynamiques nous obtenons facilement la borne suivante

$$\|\mathbf{f}_k^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i) - \mathbf{f}_i^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i)\| \leq \|\mathbf{f}_k^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i) - \mathbf{f}_s^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i)\| + \|\mathbf{f}_i^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i) - \mathbf{f}_s^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i)\| \leq 2\Delta f$$

et donc, en combinant toutes les bornes, nous construisons la borne supérieure pour $\dot{V}_{ok}(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i)$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ok}(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i) &\leq -\bar{\alpha}_k \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i\|^2 + 2C_o [C_z \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i\| \|\mathbf{e}_y\| + 2\Delta f] \\ &\leq -\frac{1}{2}\bar{\alpha}_k \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i\|^2 + 2\bar{C} \|\mathbf{e}_y\|^2 + 2\bar{\Delta f}, \end{aligned}$$

où $\bar{C} = 2\frac{C_o^2 C_z^2}{\bar{\alpha}_k}$ et $\bar{\Delta f} = 2C_o C_z \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i\|$.

Alors, pour la fonction de Lyapunov $V_z(\mathbf{z})$ nous bornons sa dérivée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_z(\mathbf{z}) &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \dot{V}_{ok}(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i) \leq -\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \alpha_k \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i\|^2 - 2\bar{C} \|\mathbf{e}_y\|^2 - 2\Delta f \right) \\ &\leq -N\alpha \|\mathbf{z} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{z}_s\|^2 + 2\bar{C} N^2 \|\mathbf{e}_y\|^2 + 2N^2 \Delta f \\ &\leq -N\alpha \|\mathbf{e}_z\|^2 + 2\bar{C} N^2 \|\mathbf{e}_y\|^2 + 2N^2 \bar{\Delta f}, \end{aligned} \tag{5.66}$$

où $\alpha = \min_{1 \leq k \leq N} \alpha_k$.

□

Finalement, nous définissons la fonction de Lyapunov $V(\mathbf{e})$ par

$$V(\mathbf{e}) = V_y(\mathbf{e}_y) + V_z(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_y\|^2 + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N V_{0k}(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i).$$

en utilisant la proposition 5, la fonction de Lyapunov peut être bornée par

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{e}_y\|^2 + \gamma_1(\|\mathbf{e}_z\|) \leq V(\mathbf{e}) \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_y\|^2 + \gamma_2(\|\mathbf{e}_z\|)$$

et donc les fonctions $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \mathcal{K}_\infty$ telles que $\tilde{\gamma}_1(\mathbf{e}) \leq V(\mathbf{e}) \leq \tilde{\gamma}_2(\mathbf{e})$. D'autre part, des équations (5.51) et (5.66) nous avons

$$\dot{V}(\mathbf{e}) \leq -\alpha N \|\mathbf{e}_z\|^2 - \left(\frac{1}{2} \sigma \lambda_2(\mathbf{L}) - 2\bar{C} N^2 \|\mathbf{e}_y\|^2 \right) + 2N^2 \bar{\Delta} f + \frac{C_2}{2}$$

Par conséquent il existe $\sigma^* > 0$ telle que pour tout $\sigma \geq \sigma^*$

$$\dot{V}(\mathbf{e}) \leq -\alpha N \|\mathbf{e}\|^2 + 2N^2 \bar{\Delta} f + \frac{C_2}{2}.$$

En utilisant le théorème 4 nous pouvons conclure que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $T > 0$ et $\sigma > \sigma^*$ telle que $t \geq T$

$$\|\mathbf{e}(t, \mathbf{x}_0)\| \leq r + \epsilon,$$

où $r = \sqrt{2N\bar{\Delta}f/\alpha}$.

5.6.2 Stabilité pratique du comportement collectif du réseau

Nous analysons dans cette partie le comportement de l'élément moyen \mathbf{x}_s dont les dynamiques sont données par les équations (5.48) et (5.38). Tout comme à la section 5.6.1, nous supposons que les hypothèses 1-3 sont satisfaites. Nous supposons donc que tous les éléments du réseau sont semi-passifs et leurs zéros dynamiques possèdent certaines propriétés incrémentales. Nous supposons que l'équation $\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s)$ (c'est-à-dire la dynamique de l'équation (5.48) pour $\mathbf{e} = \mathbf{0}$) possède un attracteur \mathcal{A} stable et donc l'hypothèse 4 est satisfaite. Les résultats présentés dans la suite montrent que les propriétés de stabilité de l'attracteur sont conservées pour le réseau interconnecté bien que sous une forme atténuée.

Premièrement, nous considérons le cas général du réseau à couplage diffusif pour lequel le résultat qui suit est valide.

Théorème 7 *Soit le système (5.11), (5.12) et soit les hypothèses 1-4 satisfaites. Alors l'ensemble \mathcal{S}_y est UGPAS en sortie. De plus, pour tout $R, \epsilon > 0$ il existe $T^* > 0$ et il existe un domaine $\mathcal{D}_0 \in \mathbb{R}^{nN}$ tel que pour toutes conditions initiales $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}_0$ l'élément moyen reste proche de l'ensemble \mathcal{A} et la borne suivante est satisfaite*

$$\|\mathbf{x}_s(t, \mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{A}} \leq \epsilon + \gamma(B_x), \quad (5.67)$$

où $\gamma(s) = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \alpha_3(\alpha_4(\mathbf{B}_x)\mathbf{B}_g)$.

Preuve

A partir des hypothèses 1-3 satisfaites et à partir du théorème 6, nous concluons que les solutions du système sont U-bornées, que l'ensemble \mathcal{S}_y est pratiquement stable et qu'il existe un instant $T^* > 0$ tel que l'erreur de synchronisation $\mathbf{e}(t, \mathbf{x}_o)$ respecte la borne (5.52).

Les dynamiques de l'élément moyen $\mathbf{x}_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i$ sont données par les équations (5.48) et (5.38), c'est-à-dire

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) \quad (5.68)$$

$$\mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_s)). \quad (5.69)$$

De part l'hypothèse 4 il existe, pour le système $\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s)$, une fonction de Lyapunov $V_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s)$ telle que

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|\mathbf{x}_s\|_{\mathcal{A}}) &\leq V_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}_s\|_{\mathcal{A}}) \\ \dot{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s) &\leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}_s\|_{\mathcal{A}}) \\ \|\nabla V_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s)\| &\leq \alpha_4(\|\mathbf{x}_s\|). \end{aligned}$$

En prenant la dérivée de cette fonction de Lyapunov le long des trajectoires du système (5.68) nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s) &= \nabla V_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s)^T \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \nabla V_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s)^T (\mathbf{x}_s) \mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s) \\ &\leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}_s\|_{\mathcal{A}}) + \alpha_4(\|\mathbf{x}_s\|) \|\mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s)\|. \end{aligned} \quad (5.70)$$

De part la proposition 4, il existe un T^* tel que $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o)\| \leq B_x$ pour tout $t \geq T^*$ et donc la même borne est validée pour \mathbf{x}_s . En effet,

$$\|\mathbf{x}_s(t, \mathbf{x}_o)\| = \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i(t, \mathbf{x}_o) \right\| \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}_i(t, \mathbf{x}_o)\| \leq B_x.$$

De plus, en utilisant (5.38) nous avons $\|\mathbf{G}_s(\mathbf{e}, \mathbf{x}_s)\| \leq k_1(\|\mathbf{e}\|, \|\mathbf{x}_s\|) \|\mathbf{e}\|$ et donc il existe une constante B_g telle que $\|\mathbf{x}_i(t, \mathbf{x}_o)\| \leq B_g$.

En substituant ces bornes dans (5.70) nous obtenons

$$\dot{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_s) \leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}_s\|_{\mathcal{A}}) + \alpha_4(B_x) B_g. \quad (5.71)$$

Le théorème est démontré en appliquant le théorème 4. \square

Dans le cas où le réseau est pratiquement synchronisé, il suit que l'ensemble \mathcal{A} est pratiquement stable pour le réseau (5.11), (5.12). Le résultat qui suit peut être déduit des théorèmes précédents.

Corollaire 3 *Soit le système (5.11), (5.12) et soit les hypothèses 1-4 satisfaites. Si l'ensemble \mathcal{S}_x est UGPAS pour ce système, alors il existe un domaine $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathbb{R}^{nN}$ tel que pour toutes conditions initiales $\mathbf{x}_o \in \mathcal{D}_0$ l'ensemble \mathcal{A} est PAS pour l'élément moyen \mathbf{x}_s .*

5.7 Réseau neuronal de Hindmarsh-Rose à couplage diffusif pratiquement synchronisé

5.7.1 Description du modèle

Dans cette section, nous appliquons les résultats développés précédemment dans ce chapitre à un réseau neuronal de Hindmarsh-Rose à couplage diffusif. Comme nous l'avons détaillé au chapitre 2, les dynamiques d'un neurone modélisé par le modèle de Hindmarsh-Rose sont données par les équations suivantes

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= -a(x^1)^3 - b(x^1)^2 + x^2 - x^3 + I + u \\ \dot{x}^2 &= c - d(x^1)^2 - x_2 \\ \dot{x}^3 &= r(s(x^1 - \hat{x}) - x^3),\end{aligned}\tag{5.72}$$

où $\mathbf{x} = [x^1, x^2, x^3]^T \in \mathbb{R}^3$ représente l'état du neurone, $y = x^1 = [1, 0, 0]\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ représente le potentiel membranaire, $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée du système et les paramètres a, b, c, d, I, \hat{x} sont des constantes positives. Suivant le choix de la valeur de ces paramètres, le modèle (5.72) peut reproduire les comportements caractéristiques de l'activité d'un neurone : spike, burst, silence (ou repos) ou encore peut rendre le système chaotique, voir [34, 106].

La semi-passivité du modèle de Hindmarsh-Rose a été prouvée dans [93] (voir aussi [108]) en utilisant une fonction de stockage quadratique $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left((x^1)^2 + \mu(x^2)^2 + \frac{1}{rs}(x^3)^2 \right),$$

où μ est une constante positive qui dépend des paramètres a, b, c, d, I .

Nous considérons le réseau de N neurones de Hindmarsh-Rose couplés et nous utiliserons la notation \mathbf{x}_i pour le $i^{\text{ème}}$ neurone. Nous introduirons également les notations suivantes : $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]^T$ pour les états de tout le réseau, $\mathbf{y} = [y_1^T, \dots, y_N^T]^T$ pour les sorties et $\mathbf{u} = [u_1^T, \dots, u_N^T]^T$ pour les entrées du réseau. Nous supposons que les neurones sont hétérogènes où chacun d'eux est décrit par le jeu de paramètres $\boldsymbol{\mu}_i = [a_i, b_i, c_i, d_i, r_i, s_i, I_i, \hat{x}_i]^T \in \mathbb{R}^8$ qui caractérise le comportement du $i^{\text{ème}}$ neurone.

Concernant le couplage nous supposons que les neurones sont interconnectés par synapse électrique, c'est-à-dire par un couplage électrique. Le couplage est donc linéaire et de la forme $a(y_i - y_j)$, où y_i, y_j représentent les potentiels membranaires et la constante k représente la conductance synaptique (que nous avons notée g_s au chapitre 2, section 2.3.1). Dans cette configuration, l'interconnexion entre les neurones est de la forme

$$u_i = -\sigma (-a_{i1}(y_i - y_1) - a_{i2}(y_i - y_2) - \dots - a_{iN}(y_i - y_N)),\tag{5.73}$$

où $a_{ij} \geq 0$ ($(i, j) = \{1, \dots, N\}^2$) représente la conductance synaptique entre les neurones i et j et $\sigma > 0$ est le paramètre de force de couplage. Nous supposons que pour tous neurones $a_{ij} = a_{ji}$ et que le réseau interconnecté ne peut pas être divisé en deux ou plusieurs réseaux non connectés. Dans ce cas la matrice \mathbf{L} qui est une matrice laplacienne et qui assure le graphe de connexion du réseau, est définie par

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^N a_{1i} & -a_{12} & \dots & -a_{1N} \\ -a_{21} & \sum_{i=1, i \neq 2}^N a_{2i} & \dots & -a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1} & -a_{N2} & \dots & \sum_{i=1}^{N-1} a_{Ni}, \end{bmatrix},$$

où \mathbf{L} est semi-définie positive et a une seule valeur propre égale à zéro.

Dans ce cas, les dynamiques du réseau peuvent s'écrire sous la forme du réseau non linéaire (5.11), (5.12) par

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^1 &= -a_i(x_i^1)^3 - b_i(x_i^1)^2 + x_i^2 - x_i^3 + I_i - \sigma \sum_{k=1}^N d_{ik}(x_i^1 - x_k^1) \\ \dot{x}_i^2 &= c_i - d_i(x_i^1)^2 - x_i^2 \\ \dot{x}_i^3 &= r_i(s_i(x_i^1 - \hat{x}_i) - x_i^3).\end{aligned}\tag{5.74}$$

Alors, en utilisant les équations (5.14), (5.17) et (5.18) et à partir de la description des dynamiques du réseau (5.74), les dynamiques du neurone moyen sont données par

$$\begin{aligned}\dot{x}_s^1 &= -a_s(x_s^1)^3 - b_s(x_s^1)^2 + x_s^2 - x_s^3 + I_s \\ \dot{x}_s^2 &= c_s - d_s(x_s^1)^2 - x_s^2 \\ \dot{x}_s^3 &= r_s(s_s(x_s^1 - \hat{x}_s) - x_s^3),\end{aligned}\tag{5.75}$$

où les paramètres du réseau neuronal de Hindmarsh-Rose $\boldsymbol{\mu}_s = [a_s, b_s, c_s, d_s, r_s, s_s, I_s, \hat{x}_s]^T$ sont déterminés par la valeur moyenne des paramètres correspondant aux neurones du réseau de Hindmarsh-Rose, c'est-à-dire $a_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i$, $b_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b_i$ et ainsi de suite.

A partir de (5.75), il est aisé de voir que dans ce cas les dynamiques moyennes du réseau sont à nouveau un neurone de Hindmarsh-Rose. Donc, son comportement peut exhiber tous les comportements caractéristiques (spiking, bursting et silence) suivant les valeurs moyennes des paramètres constituant le réseau.

5.7.2 Réseau neuronal de Hindmarsh-Rose pratiquement synchronisé

Le réseau (5.74), comme nous avons pu le voir précédemment, est couplé de manière diffusive et tous les éléments sont semi-passifs. Donc toutes les hypothèses du théorème 4 sont satisfaites pour ce type d'interconnexion symétrique et nous pouvons conclure que les solutions du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose hétérogène restent U-bornées. La proposition suivante, qui a été formulée pour la première fois par [93], est validée.

Proposition 6 *Les solutions du réseau de N neurones de Hindmarsh-Rose à couplage diffusif (5.74) sont U-bornées si la matrice de couplage \mathbf{L} est symétrique et semi-définie positive.*

Par la suite, nous présentons les résultats qui assurent au réseau (5.74) d'être pratiquement synchronisé.

D'après le théorème 5, si le réseau est connecté et que le gain de couplage σ est suffisamment grand, alors le réseau est pratiquement synchronisé en sortie ce qui implique que les potentiels des neurones sont synchronisés.

Proposition 7 *Soit le réseau de N neurones de Hindmarsh-Rose interconnectés de manière diffusive (5.74). Supposons que le réseau est connecté et que la matrice de couplage \mathbf{L} est symétrique. Alors il existe un $\sigma^* > 0$ tel que le réseau est pratiquement synchronisé en sortie pour tout $\sigma > \sigma^*$, à savoir l'ensemble $\mathcal{S}_y = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_s = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_s = \dots = \mathbf{y}_N - \mathbf{y}_s = \mathbf{0}\}$ est UGPAS.*

L'hypothèse 3 qui est requise pour l'analyse de l'état de synchronisation du réseau, est également satisfaite pour le réseau neuronal de Hindmarsh-Rose. Cette propriété est facilement vérifiée en utilisant le théorème 3.3.1 du chapitre 3 avec $\mathbf{P} = \mathbf{I}_3$

Alors, en appliquant le théorème 6 il existe une fonction β de classe \mathcal{K}_∞ telle que l'erreur de synchronisation de l'état $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s$ est bornée comme suit

$$\|\mathbf{e}(t, \mathbf{x}_o)\| \leq \beta(\Delta f),$$

où Δf est le décalage maximum possible entre les dynamiques des neurones individuelles et du neurone moyen.

Notons que les dynamiques de coordonnées \mathbf{z} pour les neurones de Hindmarsh-Rose, données par les deux dernières équations de (5.74), sont linéaires en \mathbf{z} et nous pouvons facilement calculer que pour tout vecteur $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T \in \mathbb{R}^3$, le décalage entre les zéros dynamiques a la forme

$$\mathbf{f}_k^2(w) - \mathbf{f}_s^2(w) = \begin{bmatrix} -\omega_1^2(d_k - d_s) + c_k - c_s \\ \omega_1(r_k s_k - r_s s_s) + r_k s_k \hat{x}_k - r_s s_s \hat{x}_s - (r_k - r_s)w_3 \end{bmatrix}$$

Donc la borne supérieure de l'erreur de synchronisation de l'état dépend uniquement de la borne des solutions U-bornées du réseau et des variations des paramètres c_i, r_i, s_i et \hat{x}_i . A partir du théorème 6, nous obtenons donc que si les variations de ces paramètres sont faibles alors l'erreur de synchronisation de l'état est faible. D'autre part si ces paramètres sont identiques pour tous les neurones du réseau alors le réseau est pratiquement synchronisé en état.

Une faible erreur \mathbf{e} de synchronisation de l'état implique en particulier que le comportement de synchronisation du réseau peut être proche du comportement du neurone moyen. A savoir, la valeur moyenne des paramètres de chaque neurone composant le réseau définit l'état de synchronisation du réseau.

Les détails de l'analyse des comportements possibles d'un seul neurone de Hindmarsh-Rose présentés dans [33, 34, 106] montrent que pour certains domaines dans l'ensemble des paramètres des neurones μ , les neurones modélisés par Hindmarsh-Rose peuvent exhiber un comportement de silence, de spiking ou de bursting. Ces comportements correspondent respectivement à l'existence d'un point d'équilibre, d'un cycle limite AS et d'un attracteur AS.

Bien qu'il n'existe pas de résultats analytiques concernant l'analyse de la stabilité de ces ensembles limites pour le modèle de neurones de Hindmarsh-Rose (5.72) dans la littérature, les détails d'analyses numériques utilisant une fonction de Lyapunov exponentielle sont présentés dans [33, 34, 106] et [38]. Ils mettent en avant que pour certaines valeurs des paramètres le neurone de Hindmarsh-Rose présente un cycle limite ou un attracteur exponentiellement stable. Donc, nous pouvons supposer que pour certaines valeurs des paramètres μ l'hypothèse 4 est satisfaite. Alors, à partir des théorèmes 6 et 7, nous pouvons conclure que pour des variations suffisamment faibles des paramètres c, r, s, \hat{x} , le comportement du neurone moyen définit le comportement de synchronisation du réseau. Une partie des résultats de simulation présentés à la section suivante confirme cette affirmation.

Il a été montré dans [108] que les modèles neuronaux et pas seulement le modèle d'Hindmarsh-Rose satisfont les hypothèses 1 à 3, notamment le modèle de Hodgking-Huxley et le modèle de FitzHugh-Nagumo. C'est pourquoi, une analyse similaire à celle présentée dans cette partie pour le réseau de neurones de Hindmarsh-Rose, peut-être faite pour les réseaux neuronaux des modèles cités précédemment.

5.8 Résultats de simulations du modèle de Hindmarsh-Rose pour un réseau à connexion diffusive

Dans cette section, nous présenterons quelques résultats de simulations obtenus à partir du modèle de Hindmarsh-Rose à trois équations (5.72) [57]. Dans un premier temps, nous utilisons ce modèle seul pour représenter les trois comportements caractéristiques de l'activité neuronale qui sont : les bursts (ou trains d'impulsions), les spikes (ou impulsions) et le repos ou silence. Ensuite, après un rappel du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose, nous exposerons les courbes obtenues pour $N = 8$ neurones avec une connexion diffusive (dont nous rappellerons également le modèle) avec un gain d'interconnexion K variant entre 5 et 1000. Nous observerons la présence ou non d'un phénomène de synchronisation. Nous comparerons également le réseau des 8 neurones avec le neurone moyen calculé à partir des paramètres du réseau de 8 neurones. Nous étudierons trois cas de réseaux pour la première étude et nous ajouterons un quatrième exemple pour la comparaison avec le neurone moyen. Les valeurs des paramètres a, b, c, d, s seront les mêmes pour toutes les simulations et sont respectivement : $a = 1, b = 3, c = -1, d = 5, s = 4$, seuls les paramètres (I, r) varieront.

5.8.1 Trois comportements de l'activité neuronale représentés par le modèle de Hindmarsh-Rose

Ici, nous proposons des simulations de l'activité dynamique d'un neurone en utilisant le modèle de Hindmarsh-Rose à trois équations [57]. Rappelons que ce modèle est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = -a(x^1)^3 - b(x^1)^2 + x^2 - x^3 + I \\ \dot{x}^2 = c - d(x^1)^2 - x^2 \\ \dot{x}^3 = r(s(x^1 - \hat{x}) - x^3), \end{cases} \quad (5.76)$$

où les paramètres $a, b, c, d, s, r \in \mathbb{R}$ sont des constantes définies dans [57] par : $a = 1, b = 3, c = -1, d = 5, s = 4$, I représente le courant entrant dans le neurone. \hat{x} est un point d'équilibre du système défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 - a(x^1)^3 - b(x^1)^2 \\ \dot{x}^2 = c - d(x^1)^2 - x^2, \end{cases} \quad (5.77)$$

où $\hat{x} = -0.5(1 + \sqrt{5})$ pour les valeurs de a, b, c, d définies précédemment. Pour générer les trois comportements caractéristiques de l'activité neuronale nous faisons varier r et I comme on peut le voir à la figure 5.1, où le neurone est initialisé par $\mathbf{x}_0 = [x_0^1, x_0^2, x_0^3]^T = [-3, 1, 3]^T$.

Nous verrons par la suite que suivant les paramètres (I, r) , le modèle de Hindmarsh-Rose peut générer différents types de spikes et de bursts. Par exemple, les zones de silence peuvent être modifiées par rapport à la figure 5.1(b).

A la section suivante, nous observerons le comportement de synchronisation du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose, suivant la valeur du gain d'interconnexion K .

5.8.2 Réseau de huit neurones de Hindmarsh-Rose

Ici, nous cherchons à mettre en avant qu'un réseau de neurones de Hindmarsh-Rose peut présenter un phénomène de synchronisation. D'autre part, nous verrons d'après les simulations que la valeur du gain d'interconnexion K influence ce phénomène de synchronisation. Pour cette section, la valeur des paramètres a, b, c, d sont les mêmes que précédemment pour les 8 neurones

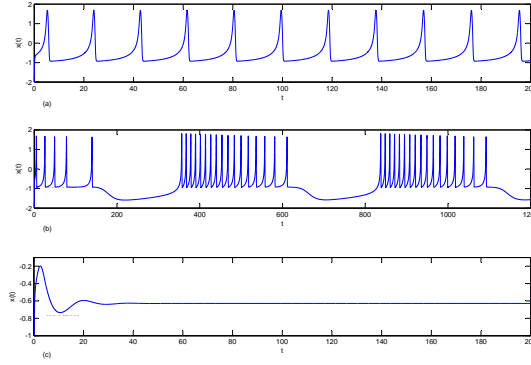


FIG. 5.1 – Trois comportements de l'activité neuronale obtenues avec le modèle de Hindmarsh-Rose. (a) Spikes, $(I, r) = (3, 0.00004)$, (b) Bursts, $(I, r) = (3, 0.001)$, (c) Repos $(I, r) = (3, 0.00007)$

et nous interconnectons les neurones de manière diffusive. Tout d'abord, rappelons le modèle du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose :

$$\begin{cases} \dot{x}_i^1 = -a_i(x_i^1)^3 - b_i(x_i^1)^2 + x_i^2 - x_i^3 + I_i + u_{ext,i} \\ \dot{x}_i^2 = c_i - d_i(x_i^1)^2 - x_i^2 \\ \dot{x}_i^3 = r(s_i(x_i^1 - \hat{x}) - x_i^3). \end{cases} \quad (5.78)$$

où les paramètres a, b, c, d, s sont les mêmes que précédemment, et où $u_{ext,i} \in \mathbb{R}$, avec $i \in \{1, \dots, 8\}$, est la fonction d'interconnexion diffusive définie par :

$$\mathbf{u}_{ext} = K\mathbf{L}\mathbf{y},$$

où $K \in \mathbb{R}$ est le gain d'interconnexion (ou gain de couplage), $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ est la matrice d'interconnexion entre les huit neurones, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^8$ est le vecteur des sorties du réseau défini par $\mathbf{y} = [y^1, \dots, y^8]^T = (\mathbf{E}_1^T \otimes \mathbf{1}^T)^T \mathbf{x}$, où $\mathbf{1}^T$ est le vecteur colonne unitaire à huit éléments, \mathbf{E}_1 est définie par (5.12) et ici \mathbf{E}_1 est telle que $\mathbf{E}_1 = [1, 0, 0]^T$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{24}$ est le vecteur des états $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_8^T]^T$, avec $\mathbf{x}_i = [x_i^1, x_i^2, x_i^3]^T$. La matrice \mathbf{L} représente la structure d'interconnexion symétrique de la figure 5.2 et s'écrit :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque 9 La connexion diffusive offre deux avantages : sa linéarité et de plus elle modélise les échanges électriques entre les neurones d'un réseau. C'est pour ces raisons que nous avons choisi cette connexion.

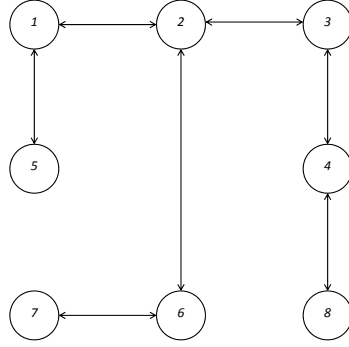


FIG. 5.2 – Graphe d'interconnexion des huit neurones du réseau.

Pour les simulations nous avons pris des valeurs de K comprises entre $[5, 1000]$. L'initialisation des neurones est la suivante :

$$\mathbf{x}_0 = [-3, 1, 3, -2, 0, 3, -4, 0, 3, 3, 2, 3, -3, 1, 3, -2, 0, 3, -4, 0, 3, 3, 2, 3]^T.$$

Comme nous l'avons remarqué au début de cette section, c'est la valeur des paramètres (I, r) qui détermine le type d'activité d'un neurone. Pour la suite nous étudierons les trois cas décrits au tableau (5.1) (les autres paramètres sont définis précédemment) dont l'activité des neurones pris individuellement, c'est-à-dire pour $K = 0$, est représentée aux figures (5.3), (5.4) et (5.5). Notons qu'effectivement, le modèle de Hindmarsh-Rose peut générer différents types de spikes et de bursts.

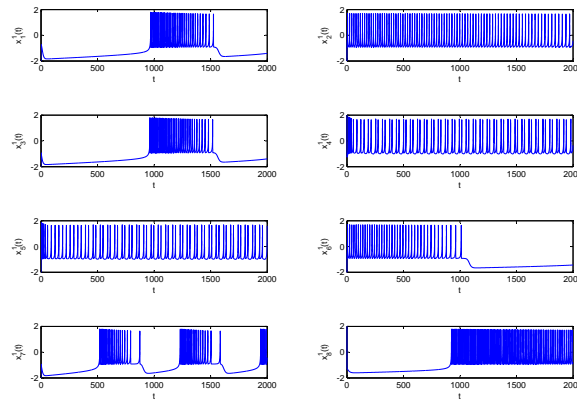


FIG. 5.3 – Les huit dynamiques de chacun des neurones du réseau de Hindmarsh-Rose avec (I, r) correspondant au cas 1, tableau 5.1.

Neurone	1	2	3	4	5	6	7	8
CAS 1								
I	2.5	3	2.5	3.5	3.5	3	3.5	3
r	0.0003	0.00004	0.0003	0.01	0.008	0.0001	0.1	0.0001
CAS 2								
I	2	3	3	2.5	2	3	3	2.5
r	0.006	0.0008	0.001	0.0009	0.002	0.004	0.01	0.003
CAS 3								
I	2	3	3	2.5	2	3	3	2.5
r	0.0006	0.0001	0.001	0.001	0.002	0.00007	0.5	0.003
CAS 4								
I	2	3	3	2.5	2	3	1.5	2.5
r	0.0006	0.0001	0.001	0.001	0.002	0.00007	0.00023	0.003

TAB. 5.1 – Valeurs des paramètres I et r pour chacun des huit neurones.

Lorsque le gain d'interconnexion n'est pas nul, notons qu'un comportement transitoire est présent, voir figure (5.6) pour l'initialisation du réseau suivante :

(a) $\mathbf{x}_{o(a)} = [-3, 1, 3, -2, 0, 3, -4, 0, 3, 3, 2, 3, -3, 1, 3, -2, 0, 3, -4, 0, 3, 3, 2, 3]^T$

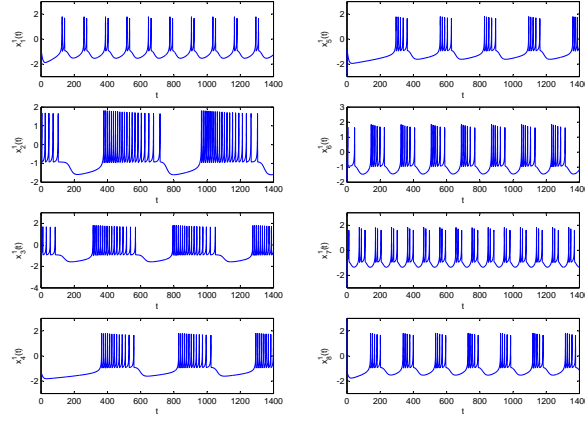


FIG. 5.4 – Les huit dynamiques de chacun des neurones du réseau de Hindmarsh-Rose avec (I, r) correspondant au cas 2, tableau 5.1.

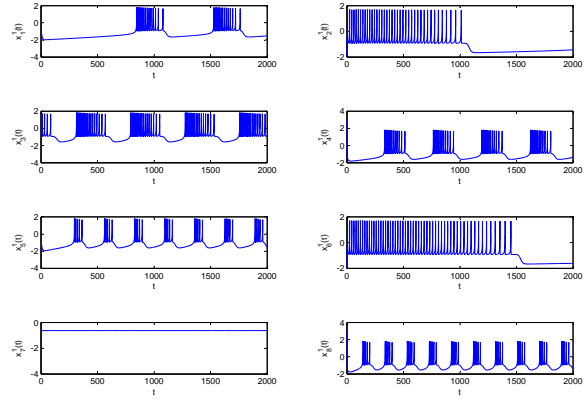


FIG. 5.5 – Les huit dynamiques de chacun des neurones du réseau de Hindmarsh-Rose avec (I, r) correspondant au cas 3, tableau 5.1.

(b) $\mathbf{x}_o(b) = [-8, 1, 3, -2, 0, 3, -4, 0, 3, 5, 2, 3, -15, 1, 3, -7, 0, 3, -11, 0, 3, 6, 2, 3]^T$

et que la durée de ce comportement transitoire diminue lorsque K augmente (voir figure (5.7)). D'autre part, la figure 5.7 montre qu'un phénomène de synchronisation apparaît pour un gain d'interconnexion K suffisamment grand.

Dans la suite, nous présentons les résultats de simulations des trois premiers cas présentés ci-dessus. Nous présenterons dans un premier temps l'erreur $e(t)$ entre la dynamique du neurone 1 et la dynamique du neurone 2 telles que : $e(t) = x_1^1(t) - x_2^1(t)$, pour $K = [50, 100, 500, 1000]$, ainsi que l'erreur $e(t)$ et la dynamique du neurone 1 $x_1^1(t)$. Nous ferons de même pour $K = 1000$ pour l'erreur $e_j(t) = x_1^1(t) - x_j^1(t)$, $j \in \{2, \dots, 8\}$.

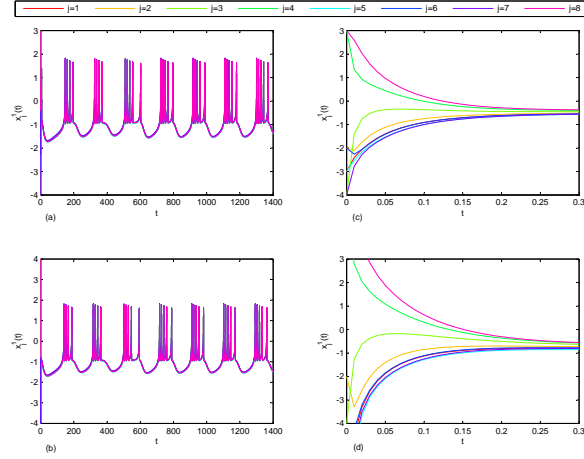


FIG. 5.6 – Comportement transitoire du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose avec (I, r) correspondant au cas 2 (tableau 5.1), pour $K = 50$. (a) $\mathbf{x}_{o(a)}$, (b) $\mathbf{x}_{o(b)}$.

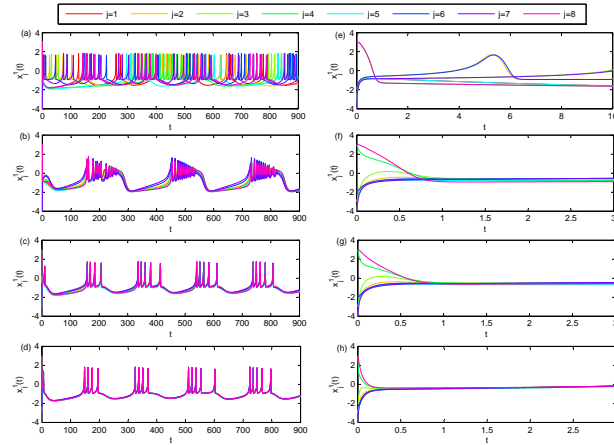


FIG. 5.7 – Les huit dynamiques de chacun des neurones du réseau de Hindmarsh-Rose avec (I, r) correspondant au cas 2, (tableau 5.1). (a) $K = 0$, (b) $K = 5$, (c) $K = 10$, (d) $K = 50$. (e), (f), (g) et (h), les zooms respectifs de (a), (b), (c) et (d).

Nous pouvons dire que pour un gain d'interconnexion K suffisamment grand, un phénomène de synchronisation apparaît (figures (5.7), (5.8) et (5.9)). En effet, l'augmentation de K entraîne une diminution de l'erreur $e(t)$ (figure (5.8)). D'autre part, bien que l'erreur entre les dynamiques des neurones ne tende pas vers une constante, il y a bien un comportement commun entre chacun des neurones. Nous pouvons observer que les pics de l'erreur $e_j(t)$ correspondent aux impulsions du neurone $x_1^1(t)$ (figure (5.10)), ce qui correspond à un phénomène de synchronisation. Par ailleurs pour $K = 1000$, la figure (5.11) ((a), (b) et (c)) montre que pour un gain suffisamment grand pour une synchronisation des neurones du réseau, les réseaux du cas 1 et du cas 2 décrits au

tableau (5.1), se synchronisent respectivement en état de spikes et en état de bursts contrairement au 3^{ème} cas qui ne se synchronise pas en une activité neuronale caractéristique. Nous voyons également qu'il y a un état transitoire de même durée dans les 3 cas (figure (5.11) (d), (e) et (f)).

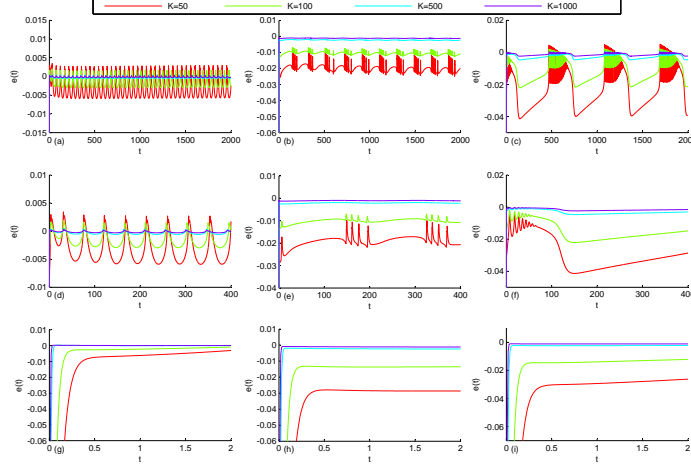


FIG. 5.8 – Erreur $e(t)$ du réseau pour $K = [50, 100, 500, 1000]$ et pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) : (a) cas 1, (b) cas 2, (c) cas 3. Les courbes (d) et (g), (e) et (h), (f) et (i) les zooms respectifs des courbes (a), (b) et (c).

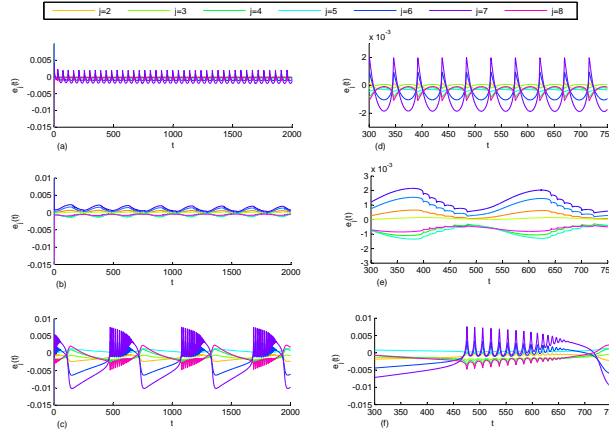


FIG. 5.9 – Erreur $e_j(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) : (a) cas 1, (b) cas 2, (c) cas 3. Les courbes (d), (e) et (f) les zooms respectifs des courbes (a), (b) et (c).

Nous terminerons ce chapitre par la comparaison des dynamiques $x_j^1(t)$, $j \in \{1, \dots, 8\}$ du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose par rapport aux dynamiques du neurone moyen $\mathbf{x}_s(t) = [x_s^1(t), x_s^2(t), x_s^3(t)]^T$. Nous tracerons aussi sur une même figure les trois dynamiques du neurone 1 \mathbf{x}_1 ainsi que celles du neurone moyen $\mathbf{x}_s(t)$ pour $K = 1000$ et pour les quatre cas

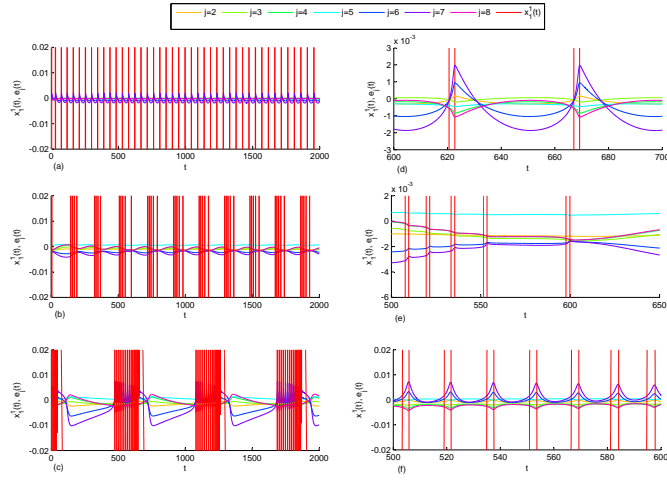


FIG. 5.10 – Erreur $e_j(t)$ et $x_1^1(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) : (a) cas 1, (b) cas 2, (c) cas 3. Les courbes (d), (e) et (f) les zooms respectifs des courbes (a), (b) et (c).

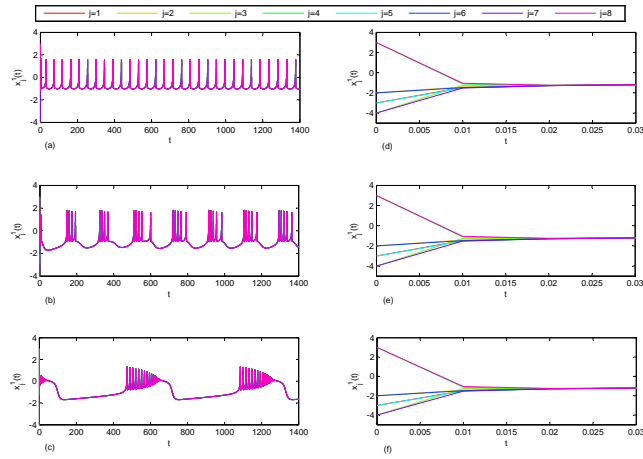


FIG. 5.11 – Dynamiques $x_j^1(t)$, $j \in \{1, \dots, 8\}$ du réseau pour $K = 1000$ et pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) : (a) cas 1, (b) cas 2, (c) cas 3.

présentés au tableau (5.1).

5.8.3 Approximation des dynamiques de synchronisation du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose par le neurone moyen de Hindmarsh-Rose

Rappelons que le réseau étudié est composé de $N = 8$ neurones. Nous définissons le neurone moyen $\mathbf{x}_s(t)$ par :

$$\begin{cases} \dot{x}_s^1 = -a(x_s^1)^3 - b(x_s^1)^2 + x_s^2 - x_s^3 + I_s \\ \dot{x}_s^2 = c - d(x_s^1)^2 - x_s^2 \\ \dot{x}_s^3 = r_s (s (x_s^1 - \hat{x}) - x_s^3) \end{cases} \quad (5.79)$$

tels que $r_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i$ et $I_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i$. Nous rappelons les valeurs des paramètres du réseau : $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, s = 4, K = 1000$.

Dans le cas 1 (tableau 5.1), nous avons

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i = 0.0149 \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i = 3.0625.$$

Pour le cas 2 (tableau 5.1), nous avons

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i = 0.0035 \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i = 2.6250.$$

Pour le cas 3 (tableau 5.1), nous avons

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i = 0.0635 \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i = 2.6875.$$

Pour le cas 4 (tableau 5.1), nous avons

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i = 0.001 \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i = 2.4375.$$

Ici nous mettons en avant que pour un gain d'interconnexion suffisamment grand les dynamiques d'un réseau de neurones modélisées par le modèle de Hindmarsh-Rose appartiennent à un même ensemble. La figure (5.12) ((a), (b) et (d)) met en évidence que les dynamiques $x_j^1(t)$, avec $j \in \{1, \dots, 8\}$ présentent un déphasage, ce qui n'est pas le cas pour la courbe (5.12) (c). Pourtant les différentes dynamiques $x_1^1(t)$ et $x_s^1(t)$, pour les cas 1, 2 et 4 (voir tableau (5.1)), suivent la même allure de trajectoire (voir figure (5.13), 5.14 et 5.16 ainsi que les figures 5.17, 5.18 et 5.20) pour $K = 1000$. Pour ces simulations nous avons pris comme conditions initiales les vecteurs suivants :

$$\mathbf{x}_o = [-8, 1, 3, -2, 0, 3, -4, 0, 3, 5, 2, 3, -15, 1, 3, -7, 0, 3, -11, 0, 3, 6, 2, 3]^T,$$

pour l'initialisation des 8 neurones du réseau et $\mathbf{x}_{os} = [10, 5, -4]^T$ pour le neurone moyen. Ces remarques ne sont pas valables pour le cas 3 comme le montre les figures (5.12), (5.15) et 5.19.

Finalement, d'après les résultats de simulations où chaque neurone du réseau est modélisé par le modèle de Hindmarsh-Rose suivant les paramètres fixes $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, s = 4, I$ et r étant les paramètres propres à chaque neurone (tableau 5.1), et pour une connexion telle que la matrice \mathbf{L} est symétrique et assure la connexion décrite par la figure 5.2, nous voyons que le modèle de Hindmarsh-Rose permet bien de générer les trois comportements caractéristiques de la dynamique des neurones : spikes, bursts et repos (figure 5.1) suivant la valeur des paramètres I et r . Ces simulations permettent d'appuyer nos résultats théoriques de ce chapitre, notamment les trois points suivants :

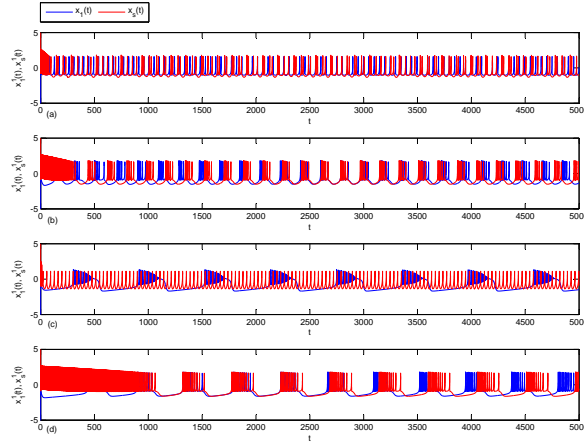


FIG. 5.12 – Dynamiques $x_j^1(t)$, $j \in \{1, \dots, 8\}$ et du neurone moyen $x_s^1(t)$, pour $K = 1000$ et pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) : (a) cas 1, (b) cas 2, (c) cas 3, (d) cas 4.

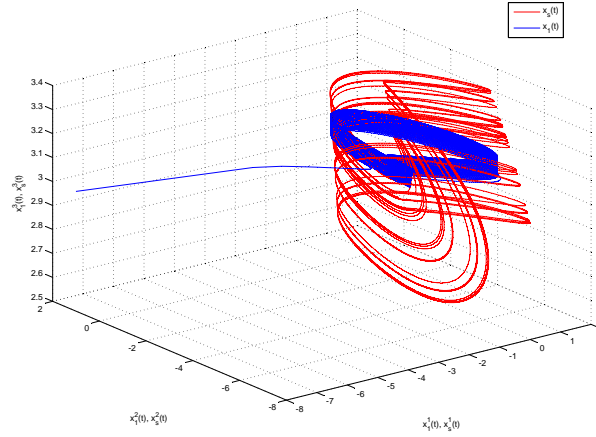


FIG. 5.13 – Dynamiques $\mathbf{x}_1(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $\mathbf{x}_s(t)$, pour les valeurs (I, r) définies au (a) cas 1.

- Pour une valeur du gain d'interconnexion K suffisamment grande, l'erreur $e(t) = x_1^1(t) - x_2^1(t)$ est quasiment nulle : de l'ordre de 10^{-2} dans le cas 2 et de l'ordre de 10^{-3} pour le cas 2 et 3 (figure 5.8).
- Les simulations exécutées pour une valeur du gain d'interconnexion $K = 1000$ pour les 3 premiers cas étudiés mettent en avant qu'un comportement de synchronisation apparaît pour un gain suffisamment grand (voir les figures 5.8, 5.9, 5.10).
- En comparant ($K = 1000$) le neurone 1 du réseau et le neurone moyen pour ce même réseau, les simulations mettent en avant que même si la trajectoire des dynamiques de chaque neurone du réseau peuvent être différentes, toutes les trajectoires appartiennent à une même surface sauf pour le cas 3 (voir les figures 5.12 à 5.20). L'approximation des

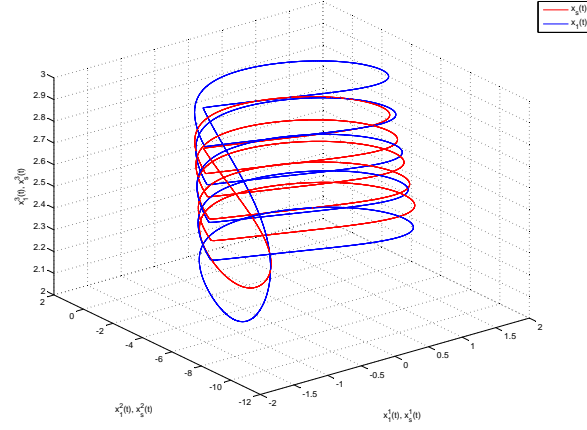


FIG. 5.14 – Dynamiques $\mathbf{x}_1(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $\mathbf{x}_s(t)$, pour les valeurs (I, r) définies au cas 2.

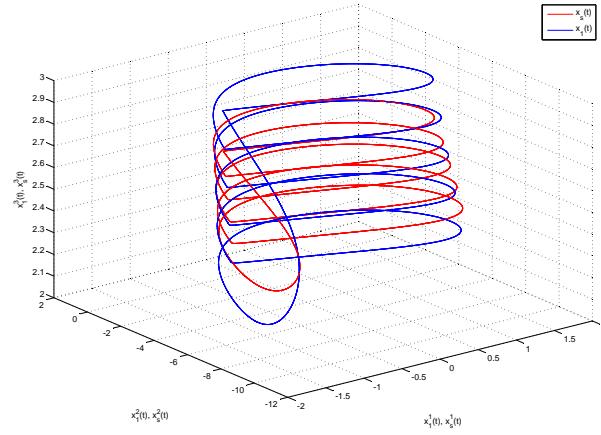


FIG. 5.15 – Dynamiques $\mathbf{x}_1(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $\mathbf{x}_s(t)$, pour les valeurs (I, r) définies au cas 3.

trajectoires du réseau en état de synchronisation par le neurone moyen fonctionne pour certaines valeurs de (I, r) rendant le système stable, pour plus de détail voir [35].

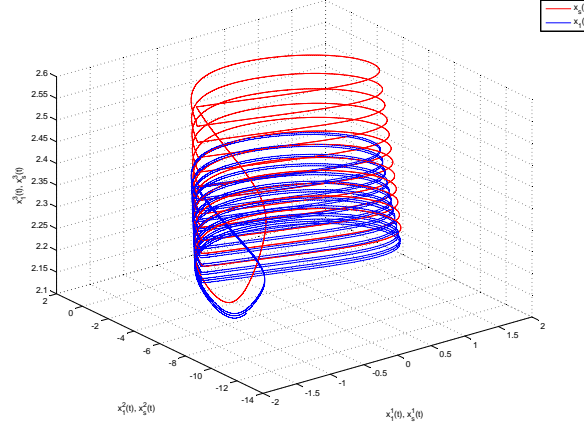


FIG. 5.16 – Dynamiques $\mathbf{x}_1(t)$ du réseau pour $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $\mathbf{x}_s(t)$, pour les valeurs (I, r) définies au cas 4.

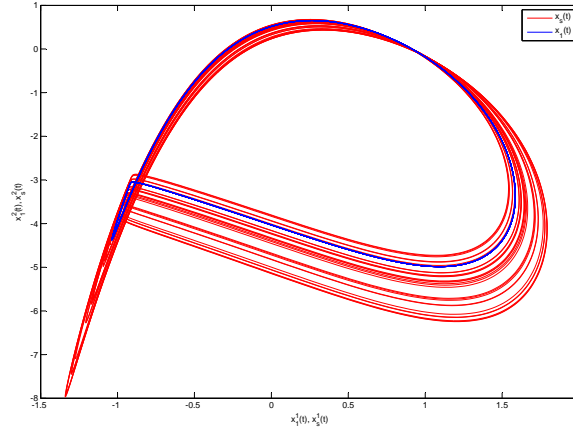


FIG. 5.17 – Dynamiques $[x_1^1(t) x_1^2(t)]^T$ du réseau $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $[x_s^1(t) x_s^2(t)]^T$ pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) cas 1.

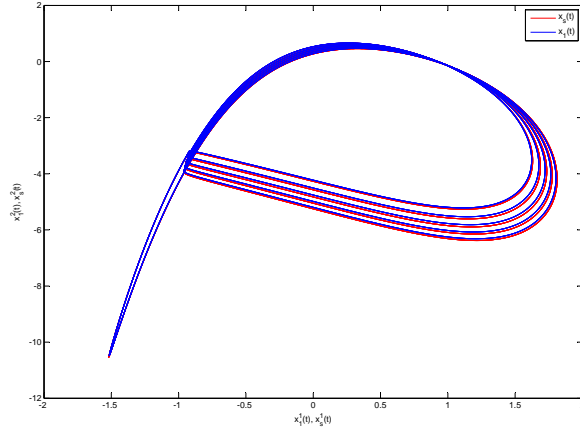


FIG. 5.18 – Dynamiques $[x_1^1(t) x_1^2(t)]^T$ du réseau $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $[x_s^1(t) x_s^2(t)]^T$ pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) cas 2.

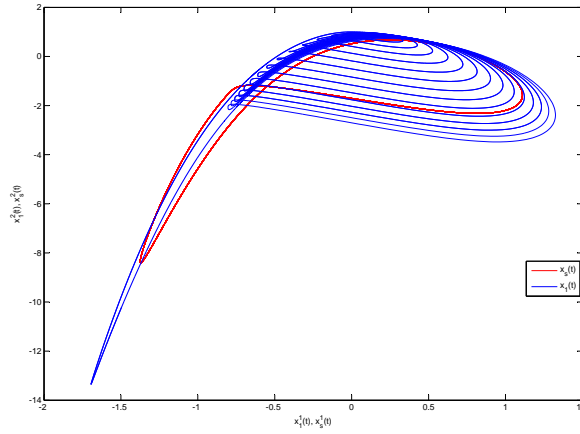


FIG. 5.19 – Dynamiques $[x_1^1(t) x_1^2(t)]^T$ du réseau $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $[x_s^1(t), x_s^2(t)]^T$ pour les valeurs (I, r) définies au tableau (5.1) cas 3.

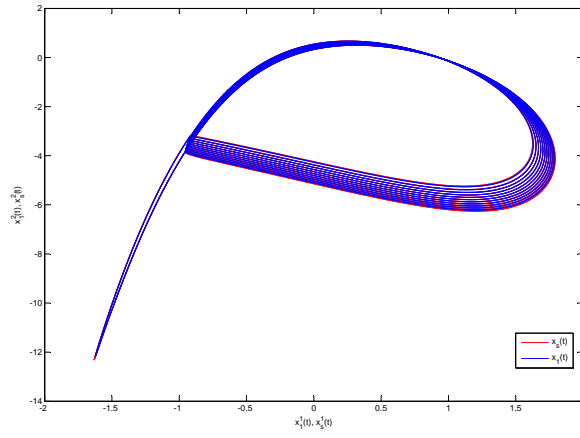


FIG. 5.20 – Dynamiques $[x_1^1(t), x_1^2(t)]^T$ du réseau pour $K = 1000$ et dynamiques du neurone moyen $[x_s^1(t), x_s^2(t)]^T$ pour les valeurs (I, r) définies au cas 4.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Dans ce travail nous nous sommes intéressés au problème de la synchronisation de l'activité des neurones. Ce phénomène de synchronisation est responsable de certains troubles du comportement comme par exemple les troubles de l'humeur ou la perte de mémoire et il est notamment responsable du tremblement qui est un des symptômes de la maladie de Parkinson. C'est dans une volonté de comprendre les phénomènes de synchronisation neuronale, qui est un premier pas vers l'amélioration à long terme des techniques de stimulation cérébrale profonde, que nous avons étudié le comportement de synchronisation de deux modèles décrivant les dynamiques d'un réseau de neurones d'un point de vue de la théorie du contrôle. Nous avons également étudié la stabilité de deux systèmes non linéaires. Ces deux modèles de neurones sont : le modèle de Kuramoto et le réseau de neurones de Hindmarsh-Rose. Pour faciliter l'analyse du modèle de Kuramoto, nous l'avons reformulé en un modèle linéaire.

Nous avons tout d'abord proposé un chapitre en deux parties. La première partie explique d'un point de vue biologique et physiologique et de manière simplifiée, comment se réalise la communication entre neurones donnant naissance à des signaux électriques. Nous avons tenu à mettre un accent sur cette partie étant donnée l'importance de ces échanges sur la motricité (tremblement) ou encore sur l'état psychologique (trouble de l'humeur) d'un individu. Le report des différents types de signaux électriques générés par les neurones ainsi que les différents modes de voies communicantes, permettent de comprendre ce que modélisent les principaux modèles mathématiques que nous avons présentés dans la seconde partie de ce chapitre. Ces modèles sont : le modèle de Hodgking-Huxley (premier modèle mathématique de l'activité neuronale), le modèle de FitzHugh-Nagumo (une version simplifiée du modèle de Hodgking-Huxley), ainsi que les modèles de Hindmarsh-Rose et le modèle de Kuramoto. Nous avons expliqué par la suite que suivant le problème traité, nous pouvions utiliser des modèles simplifiés. Ici par exemple, nous cherchions à caractériser l'état de synchronisation de l'activité neuronale. Nous avons donc étudiés entre autres le modèle de Kuramoto, qui est très utilisé pour l'analyse du comportement d'oscillateurs interconnectés. Toujours attaché à l'envie de produire un rapport le plus complet possible mais aussi le plus pédagogique possible, nous avons présenté les concepts, définitions, théorèmes bien connus ou non, nécessaires à la réalisation de ce travail de thèse. Et c'est en alliant :

- la théorie des graphes qui décrit la topologie de systèmes interconnectés (la topologie du système joue un rôle pour une possible synchronisation des dynamiques),
- Les définitions des différents types de synchronisation,

- les propriétés de passivité ou de semi-passivité et les résultats sur la stabilité de systèmes ayant ces propriétés,

que nous avons pu caractériser les comportements asymptotiques et les propriétés de stabilité dont la synchronisation, des modèles étudiés.

Dans ce travail, nous avons analysé deux types de modèles mathématiques d'un point de vue de la théorie du contrôle, afin d'établir le comportement synchronisé et les propriétés de stabilité de chacun d'eux. C'est au travers de la classe des systèmes non linéaires interconnectés semi-passifs, qui inclut comme cas particulier les réseaux neuronaux, que nous avons étudié le réseau de neurones de Hindmarsh-Rose au chapitre 5. L'un des points commun entre l'étude du modèle de Kuramoto faite au chapitre 4 et l'étude des systèmes neuronaux semi-passifs faite au chapitre 5, réside dans le fait que les propriétés d'interconnexion et par conséquent de la matrice laplacienne, tiennent un rôle crucial pour l'analyse de la synchronisation de réseaux. Dans ces deux chapitres, le cadre que nous avons proposé pour faire cette analyse permet non seulement d'assurer la synchronisation asymptotique mais également de caractériser des ensembles invariants propres aux systèmes étudiés.

Modèle de Kuramoto et modèle linéaire à variables complexes

Pour étudier le modèle de Kuramoto nous avons construit un modèle linéaire à variables complexes et avons prouvé que le modèle de Kuramoto est une projection asymptotique de ce modèle pour presque toutes les conditions initiales. La construction du modèle linéaire doit répondre à certains critères reportés au cours du chapitre 4. En constatant que les propriétés des systèmes linéaires à variables réelles s'appliquent aux systèmes linéaires à variables complexes, le modèle que nous avons proposé voit son étude théorique, portant sur le comportement de synchronisation asymptotique et sur la stabilité, facilitée, ce qui prouve que ce modèle linéaire a au moins un intérêt par rapport au modèle de Kuramoto. Nous avons établi à partir de l'idée présentée dans [101], certains critères devant être satisfaits par le modèle linéaire et avons défini une famille de tels systèmes. Finalement, nous avons trouvé qu'il n'y avait qu'un seul système stable ayant un comportement asymptotique déterminé par un cycle limite pour un gain d'interconnexion suffisamment grand. Nous avons défini que ce cycle limite est caractérisé par le paramètre d'ordre pondéré qui a une amplitude constante.

Réseaux neuronaux à couplage diffusif

A partir du modèle de Hindmarsh-Rose qui décrit les dynamiques d'un neurone, nous avons construit et donné une écriture matricielle d'un modèle de réseau de neurones à couplage diffusif.

Pour la généralisation de ce modèle, dans le cas où chaque élément du réseau est représenté par un système semi-passif, nous avons reformulé les conditions qui garantissent la synchronisation pratique du réseau pour un gain d'interconnexion suffisamment grand et quel que soit le signal généré par chacun des neurones isolés. De plus, nous avons caractérisé le comportement limite du réseau en le comparant à la moyenne de chacune des dynamiques le constituant. Nous avons appliqué ces résultats à l'analyse du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose et nous avons démontré que le caractère synchronisé du comportement du réseau dépend de la valeur du gain d'interconnexion. Nous avons également montré que l'estimation par un neurone "moyen" du comportement du réseau proposée dans ce travail, donne de bon résultats pour un gain d'interconnexion suffisamment grand mais nécessite d'être affinée pour une valeur de ce gain plus petite.

L'approche utilisée dans ce travail pour l'analyse du modèle de réseau de Hindmarsh-Rose pourra s'appliquer à l'étude de l'activité neuronale au niveau macroscopique ou encore à d'autres réseaux neuronaux interconnectés par couplage synaptique. De manière globale, les deux études théoriques proposées aux chapitres 4 et 5 pourront aider à une meilleure compréhension du comportement des réseaux neuronaux afin de concevoir une commande en boucle fermée pour une application à la stimulation cérébrale profonde. Plus particulièrement, les travaux reportés dans ce manuscrit pourraient être poursuivis dans les directions suivantes :

Modèle de Kuramoto

- Analyse de la robustesse et des phénomènes de synchronisation en présence de perturbations externes ou suivant une variation des paramètres (gain variant dans le temps).
- Analyse du modèle de Kuramoto dans le cas où le couplage n'est pas complet.
- Étude de la commande assurant l'état de synchronisation et de désynchronisation du modèle de Kuramoto.

Réseau neuronaux

- Analyse du réseau de Hindmarsh-Rose pour un couplage non symétrique et pour un graphe d'interconnexion non fortement connecté. La synchronisation de modèle ainsi connecté est connue sous le nom de synchronisation partielle (*cluster synchronization*) et dans ce cas elle est la seule possible.
- Analyse de la robustesse avec des perturbations externes ou suivant une variation des paramètres (gain variant dans le temps).
- Étude du réseau de neurones de Hindmarsh-Rose pour une interconnexion synaptique (non linéaire) et ajout de plasticité.

Bibliographie

- [1] L.F. Abbott and T.B. Kepler. Model neurons : From Hodgkin-Huxley to hopfield. *Lecture Notes in Physics, Statistical Mechanics of Neuronal Networks*, 1961.
- [2] D. Aeyels and J. Rogge. Existence of partial entrainment and stability of phase locking behavior of coupled oscillators. *Progress of Theoretical Physics*, 112(6) :921–942, december 2004.
- [3] A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E. Khakin. *Theory of oscillators*. 1987 (2nd ed. 1959 in Russian).
- [4] M. Bazhenov, R. Huerta, M.I. Rabinovich, and T. Sejnowski. Cooperative behavior of a chain of synaptically coupled chaotic neurons. *Physica D*, 116 :392–400, 1998.
- [5] R.E. Bellman. *Introduction to matrix analysis*. SIAM, 1970.
- [6] I. Belykh, E. de Lange, and M. Hasler. Synchronization of bursting neurons : What matters in the network topology ? *Physical Review Letters*, 94, 2005.
- [7] A. L. Benabid, P. Pollak, G. Gao, D. Hoffmann, P. Limousin, E. Gay, I. Payen, and A. Benazzouz. Chronic electrical stimulation of the ventralis intermedius nucleus of the thalamus as a treatment of movement disorders. *J Neurosurg*, pages 203–214, 1984.
- [8] M.V.L. Bennett and R.S. Zuckin. Electrical coupling and neuronal synchronization in the mammalian brain. *Neuron*, 41 :495–511, february 2004.
- [9] B. Blad. Deep brain stimulation for Parkinson’s disease : electropermeabilization and activation. *ITBM-RBM*, 27 :238–242, September 2006.
- [10] M. Blatow, A. Rozov, I. Katona, S.G. Hormuzdi, A.H. Meyer, M.A. Whittington, A. Caputi, and H. Monyer. A novel network of multipolar bursting interneurons generates theta frequency oscillations in neocortex. *Neuron*, 38 :805–817, jun 2003.
- [11] I.I. Blekhman, A.L. Fradkov, H. Nijmeijer, and A.Y. Pogromsky. On self-synchronization and controlled synchronization. *Syst. Control Lett.*, 31 :299 – 305, 1997.
- [12] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D. U. Hwang. Complex networks : Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424 :175–308, 2006.
- [13] S. Boccaletti, L.M. Pecora, and A. Palaez. Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 63 :066219, 2001.
- [14] M. Breakspear, S. Heitmann, and A. Daffertshofer. Generative models of cortical oscillations : Neurobiological implications of the Kuramoto model. *Front Hum Neurosc*, 4, 2010.
- [15] R. Brette and W. Gerstner. Adaptive exponential integrate-and-fire model as an effective description of neuronal activity. *Journal of neurophysiology*, 94(5) :3637–3642, 2005.

- [16] P. Brown, A. Oliviero, P. Mazzone, A. Insola, P. Tonali, and V. Di Lazzaro. Dopamine dependency of oscillations between subthalamic nucleus and pallidum in parkinson's disease. *Journal of Neuroscience*, 21 :1033–1038, 2001.
- [17] P. Brown and D. Williams. Basal ganglia local field potential activity : character and functional significance in the human. *Clinical Neuropsychology*, 116 :2510 – 2519, 2005.
- [18] R. Brown and L. Kocarev. A unifying definition of synchronization for dynamical systems. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10(2) :344 – 349, 2000.
- [19] J. Buck. Synchronous rhythmic flashing in fireflies. *Quart. Rev. Biol.*, 63 :265 – 289, 1988.
- [20] A. N. Burkitt. A review of the integrate-and-fire neuron model : I. homogeneous synaptic input. *Biological cybernetics*, 95(1) :1–19, 2006.
- [21] J. Cabral, E. Hugues, O. Sporns, and G. Deco. Role of local network oscillations in resting-state functional connectivity. *Neuroimage*, 1, 2011.
- [22] H. Cagnan, H.G.E. Meijer, and all. Frequency-selectivity of a thalamocortical relay neuron during parkinson's disease and deep brain stimulation : a computational study. *European Journal of Neuroscience*, 30 :1306–1317, 2009.
- [23] A. Chaillet and A. Loria. Necessary and sufficient conditions for uniform semiglobal practical asymptotic stability : Application to cascaded systems. *Automatica*, 42(11) :1899–1906, 2006.
- [24] P. Checco, M. Biey, M. Righero, and L. Kocarev. Synchronization and bifurcations in networks of coupled Hindmarsh-Rose neurons. *IEEE international Symposium on Circuits and Systems*, pages 1541–1544, 2007.
- [25] P. Checco, M. Righero, M. Biey, and L. Kocarev. Synchronization in networks of Hindmarsh-Rose neurons. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 55(12) :1274–1278, 2008.
- [26] M. Chong, R. Postoyan, D. Nesic, L. Kuhlmann, and A. Varsavsky. A nonlinear estimator for the activity of neuronal populations in the hippocampus. *Proceedings of the IFAC World Congress*, Vol. 18, No. 1, 2011.
- [27] N. Chopra and M. W. Spong. On exponential synchronization of Kuramoto oscillators. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 54(2) :353–357, 2009.
- [28] L. Contevelle and E. Panteley. Linear reformulation of the kuramoto model : asymptotic mapping and stability properties. *2nd Int. Conf. on Comm., Computing and Control Applications*, Dec. 2012.
- [29] L. Contevelle and E. Panteley. Practical synchronization in a network of non-identical hindmarsh-rose neurons, antalya, turkey,. *4th Int. Interdiscip. Chaos Symp.*, April 2012.
- [30] L. Contevelle and E. Panteley. Practical synchronization in complex networks of non-identical dynamical nodes. *20th Proc. Int. Symp. on Math. Theory of Networks and Systems*, Melbourne, Australia,, July 2012.
- [31] L. Contevelle and E. Panteley. On asymptotic equivalence of the "all-to-all" kuramoto model and certain linear system : stability analysis of phase locked solutions. *ECC*, July 2012, Zurich, Switzerland.
- [32] M. Corless and 1139-1144 G. Leitmann, 26(5). Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981.

- [33] N. Corson. *Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité*. PhD thesis, Université du Havre, 2009.
- [34] N. Corson, M. A. Aziz-Alaoui, R. Ghnemat, S. Balev, and C. Bertelle. Modeling the dynamics of complexe interaction systems : From morphogenesis to control. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 22, 2012.
- [35] N. Corson and M.A. Aziz-Alaoui. Asymptotic dynamics of the slow-fast hindmarsh-rose neuronal system, series b : Algorithms and applications. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 16 :535–549, 2009.
- [36] R. Courtemanche, N. Fujii, and A.M. Graybiel. Synchronous, focally modulated beta-band oscillations characterize local field potential activity in the striatum of awake behaving monkeys. *Journal of Neuroscience*, 23 :11741–11752, 2003.
- [37] D. Cumin and C.P. Unsworth. Generalising the Kuramoto model for the study of neuronal synchronisation in the brain. *Physica D*, 226 :181–196, 2007.
- [38] M. F. Danca and Q. Wang. Synthesizing attractors of Hindmarsh-Rose neuronal systems. *Nonlinear Dynamics*, 62(1-2) :437–446, 2010.
- [39] M.R. Deans, J.R. Gibson, C. Sellito, B.W. Connors, and D.L. Paul. Synchronous activity of inhibitory networks in neocortex requires electrical synapses containing connexin36. *Neuron*, 31 :477–485, August 2001.
- [40] B.P. Demidovich. *Lectures on stability theory*. 1967.
- [41] A. Destexhe, M. Neubig, D. Hülrich, and J. Huguenard. Dendritic low-threshold calcium currents in thalamic relay cells. *The Journal of Neuroscience*, 18(10) :3574–3588, may 1998.
- [42] F. Dörfler and F. Bullo. On the critical coupling for Kuramoto oscillators. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 10(3) :1070–1099, 2011.
- [43] G. Drion, A. Franci, V. Seutin, and R. Sepulchre. A novel phase portrait for neuronal excitability. *PloS one*, 7(8) :41806, 2012.
- [44] J. M. Dunn and R. S. Anderssen. A review of models used for understanding epileptic seizures. *19th International Congress on Modelling and Simulation*, pages 12–16, Dec. 2011.
- [45] A. Eusobio and P. Eusobio. Oscillatory activity in the basal ganglia. *Parkinsonism and Related Disorders*, 13 :434–436, 2007.
- [46] D. Fairhurst, I. Tyukin, H. Nijmeijer, and C. Van Leeuwen. Observers for canonic models of neural oscillators. *Math. Model. Nat. Phenom*, 5(2) :146–184, 2010.
- [47] M. Fiedler. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23(2) :298–305, 1973.
- [48] M. Fiedler. Property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 25(4) :619–633, 1975.
- [49] R. FitzHugh. Impulse and physiological states in models of nerve membrane. *J. Biohys.*, pages 445–466, 1961.
- [50] A. Franci. *Pathological synchronization in neuronal populations : a control theoretic perspective*. PhD thesis, Univ. Paris Sud 11, 2012.
- [51] A. Franci, A. Chaillet, and S. Bezzaoucha. Toward oscillations inhibition by mean-field feedback in Kuramoto oscillators. In *In Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, Orlando, USA*, 2011.

- [52] A. Franci, A. Chaillet, and W. Pasillas-Lepine. Existence and robustness of phase-locking in coupled Kuramoto oscillators under mean-field feedback. *Automatica - Special Issue on Biology Systems*, 2011.
- [53] A. Franci, G. Drion, and R. Sepulchre. An organizing center in a planar model of neuronal excitability. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 11(4) :1698–1722, 2012.
- [54] A. Franci, L. Scardovi, and A. Chaillet. An input-output approach to the robust synchronization of dynamical systems with an application to the Hindmarsh-Rose neuronal model. *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, 2011.
- [55] C. Hauptmann and P.A. Tass. Therapeutic rewiring by means of desynchronizing brain stimulation. *BioSystems*, 89 :173–181, April 2006.
- [56] J.L. Hindmarsh and R.M. Rose. A model of the nerve impulse using two first order differential equations. *Nature*, 296 :162–164, 1982.
- [57] J.L. Hindmarsh and R.M. Rose. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Sc. London*, B 221 :87–102, 1984.
- [58] M.L. Hines and N.T. Carnevale. The neuron simulation environment. *MIT Press Journals Neural Computation*, 9, 1997.
- [59] M. W. Hirsh and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. 1974.
- [60] A. Hodgkin and A. Huxley. A quantitative description of membrane current and it's application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 117 :500–544, 1952.
- [61] A.J. Holgado, J.R. Terry, and R. Bogacz. Conditions for the generation of beta oscillations in the subthalamic nucleus-globus pallidus network. *J. Neuroscience*, 30(37) :12340–12352, 2010.
- [62] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge, U.K : Cambridge Univ. Press, 1978.
- [63] W.D. Hutchison, J.O. Dostrovsky, J.R. Walters, R. Courtemanche, T. Boraud, J. Goldberg, and al. Neuronal oscillations in the basal ganglia and movement disorders : evidence from whole animal and human recordings. *Journal of Neuroscience*, 24 :9240 – 9243, 2004.
- [64] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer, 1999.
- [65] A. Isidori and C.I. Byrnes. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(2) :131–140, 1990.
- [66] E.M. Izhikevich. Neural excitability, spiking and bursting. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 10 :1171–1266, 2000.
- [67] E.M. Izhikevich. Which model to use for cortical spiking neurons ? *IEEE Trans. on Neuron Net.*, 15 (5) :1063–1070, 2004.
- [68] E.M. Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience*. MIT Press, Cambridge, 2007.
- [69] A. Jadbabaie, N. Motee, and M. Barahona. On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators. *Proceedings of the American Control Conference*, 5 :4296–4301, 2004.
- [70] M.D. Johnson, S. Miocinovic, C.C. McIntyre, and J.L. Vitek. Mechanisms and targets of deep brain stimulation in movement disorders. *Neurotherapeutics : The Journal of the American Society for Experimental NeuroTherapeutics*, 5(2) :294–308, April 2008.

- [71] J. Jouffroy and J. J. Slotine. Methodological remarks on contraction theory. *43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 3 :2537–2543, 2004.
- [72] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, 1980.
- [73] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems, 2nd Edition*. Prentice-Hall, 1996.
- [74] K. D. Kim and P. R. Kumar. Cyber-physical systems : A perspective at the centennial. *Proceedings of IEEE Trans. on Automatic Control*, 100, no. Special Centennial Issue :1287 – 1308, May 2012.
- [75] W.M. Kistler, W. Gerstner, and J.L. van Hemmen. Reduction of the Hodgkin-Huxley equation to a single variable threshold model. *Neural Computation*, 9 :1015–1045, 1997.
- [76] Y. Kuramoto. Cooperative dynamics of oscillator community. *Prog. Theor. Phys.*, 79 :223–240, 1984.
- [77] Y. Kuramoto and H. Arakai. Chemical oscillations, waves and turbulence. *Berlin : Springer*, 1984.
- [78] L. Lapique. Recherches quantitatives sur l’excitation électrique des nerfs traitée comme une polarization. *J. Physiol. Pathol. Gen.*, 9 :620–635, 1907.
- [79] T. Liu, J. Zhao, and D. J. Hill. Synchronization of complex delayed dynamical networks with nonlinearly coupled nodes. *Chaos Solitons Fractals*, 40 :1506 – 1519, May 2009.
- [80] Y. C. Liu and N. Chopra. Robust controlled synchronization of interconnected robotic systems. *American Control Conference (ACC), IEEE*, pages 1434–1439, 2010.
- [81] W. Lohmiller and J.J.Slotine. Contraction analysis of non-linear distributed systems. *International Journal of Control*, 78 :678–688, 2005.
- [82] N. Mallet, A. Pogosyan, L. F. Marton, J. P. Bolam, P. Brown, , and P. J. Magill. Parkinson beta oscillations in the external globus pallidus and their relationship with subthalamic nucleus activity. *J.Neuroscience*, 28(7) :14 245 – 14 258, 2008.
- [83] M. Mamat, P. W. Kurniawan, and A. Kartono. Development of dynamics and synchronization model for coupled neurons using Hindmarsh-Rose model. *Applied Mathematical Sciences*, 2013.
- [84] P. C. Matthews, R. E. Mirollo, and S. H. Strogatz. Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 52 :293–331, 1991.
- [85] P. C. Matthews and S. H. Strogatz. Phase diagram for the collective behavior of limit-cycle oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 65 :1701–1704, 1990.
- [86] A. Mauroy and R. Sepulchre. Global analysis of a continuum model for monotone pulse-coupled oscillators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(5) :1154 – 1166, 2013.
- [87] M.D.Bevan, P.J. Magill, D. Terman, J.P. Bolam, and C.J. Wilson. Move to the rhythm : oscillations in the subthalamic nucleus-external globus pallidus network. *Trends Neurosciences*, 25 :525 – 531, 2002.
- [88] J. Modolo, A. Garenne, J. Henry, and A. Beuter. Development and validation of a neuronal population mode based on the dynamics of a discontinuous membrane potential neuron model. *Journal of integrative Neuroscience*, 6(4) :625–655, November 2007.
- [89] B. Mohar and N.T.M. Juvan. Some applications of Laplace eigenvalues of graphs. *Springer Netherlands*, pages 227–275, 1997.
- [90] F. Mormann, K. Lehnertz, P. David, and C. E. Elger. Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 144(3-4) :358 – 369, oct. 2000.

- [91] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 50 :2061 – 2070, 1962.
- [92] T. Oguchi, T. Yamamoto, and H. Nijmeijer. Synchronization of bidirectionally coupled nonlinear systems with time-varying delay. *In Topics in Time Delay Systems, Springer Berlin Heidelberg.*, pages 391–401, 2009.
- [93] W.T. Oud and I. Tyukin. Sufficient conditions for synchronization in an ensemble of Hindmarsh and Rose neurons : passivity-based approach. *IFAC Symposium. Nonlinear Control Systems, Stuttgart*, (6), 2004.
- [94] L.M. Pecora and T.L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical Review Letters*, 80(10) :2109–2112, 1998.
- [95] N. Petit and P. Rouchon. *Automatique dynamique et contrôle des systèmes*, 2009.
- [96] R.E. Plant and M. Kim. Mathematical descriptions of bursting pacemaker neuron by a modification of the Hodgkin-Huxley equations. *Biophysical Journal*, 16 :227–244, 1976.
- [97] A. Pogromsky and H. Nijmeijer. Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems. *IEEE Transaction on Circuit and Systems*, 48 :152–162, 2001.
- [98] A. Pogromsky, G. Santoboni, and H. Nijmeijer. Partial synchronization : from symmetry towards stability. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 172(1-4) :65–87, 2002.
- [99] A. Pogromsky, T. Yu, T. Glad, and H. Nijmeijer. On diffusion driven oscillations in coupled dynamical systems. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 9 :629–644, 1999.
- [100] J. Rinzel and B. Ermentrout. In I. Segev C. Koch, editor, *Methods of Neural Modeling : From Synapses to Networks*, chapter Analysis of neural excitability and oscillations, pages 135–169. MIT Press, 1989.
- [101] D. C. Roberts. Linear reformulation of the Kuramoto model of self-synchronizing coupled oscillators. *Physical Review E*, 77(3), 2008.
- [102] G. Royle and C. Godsil. *Algebraic Graph Theory*. Springer, 2001.
- [103] J.E. Rubin and D. Terman. High frequency stimulation of the subthalamic nucleus eliminates pathological thalamic rhythmicity in a computational model. *Journal of Computational Neuroscience*, 16 :211–235, january 2004.
- [104] R. Olfati Saber and R. M. Murray. Consensus problems in networks of agent with switching topology and time-delays. *IEEE Trans. on Automatic Control.*, 49(9) :1520–1533, september 2004.
- [105] L. Scardovi, M. Arcak, and E. D. Sontag. Synchronization of interconnected systems with an input-output approach. *Part I : Main results. Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control CDC.*, pages 609–614, 2009.
- [106] A. Shilnikov and M. Kolomiets. Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh-Rose model : a case study - a tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(8) :2141–2168, 2008.
- [107] D. Somers and N. Kopell. Rapid synchronization through fast threshold modulation. *Biological Cybernetics*, 68 :393–407, 1993.
- [108] E. Steur, I. Tyukin, and H. Nijmeijer. Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators. *Physica D*, 238 :2119–2128, 2009.
- [109] S. H. Strogatz and R. E. Mirollo. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. *J. Stat. Phys.*, 63, 1991.

- [110] S.H. Strogatz. From Kuramoto to Crawford : exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 143 :1–20, 2000.
- [111] S.H. Strogatz and I. Stewart. Coupled oscillators and biological synchronization. *Scientific American*, 269 :102 – 109, 1993.
- [112] P. A. Tass. Desynchronizing double-pulse phase resetting and application to deep brain stimulation. *Biol. Cybern.*, 85(5), 2001.
- [113] P. A. Tass. Desynchronization of brain rhythms with soft phase-resetting techniques. *Biol. Cybern.*, 87(2), 2002.
- [114] P. A. Tass. Phase resetting in medicine and biology. *Berlin, Germany : Springer*, 2007.
- [115] P.A. Tass and H. Haken. Synchronization in networks of limit cycle oscillators. *Z. Phys. B.*, 100 :303–320, 1996.
- [116] P.A. Tass and C. Hauptmann. Therapeutic modulation of synaptic connectivity with desynchronizing brain stimulation. *International Journal of Psychophysiology*, 64 :53–61, 2007.
- [117] A. R. Teel, J. Peuteman, and D. Aeyels. Semi-global practical asymptotic stability and averaging. *Systems and control letters*, 37(5) :329–334, 1999.
- [118] G. Thut and C. Minussi. New insight into rhythmic brain activity from TMS-EEG studies. *Trends Cogn Sci.*, 13((4)) :182–189, Apr 2009.
- [119] I. Tyukin, E. Steur, H. Nijmeijer, D. Fairhurst, I. Song, A. Semyanov, and C. V. Leeuwen. State and parameter estimation for canonic models of neural oscillators. *International journal of neural systems*, 20(03) :193–207, 2010.
- [120] M. Verwoerd and O. Mason. Global phase-locking in finite populations of phase-coupled oscillators. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 7(1) :134–160, 2008.
- [121] T.J. Walker. Acoustic synchrony : Two mechanisms in the snowy tree cricket. *Science*, 166 :891 – 894, 1969.
- [122] J. Y. Wang, J. W. Feng, C. Xu, and Y. Zhao. Cluster synchronization of nonlinearly-coupled complex networks with nonidentical nodes and asymmetrical coupling matrix. *Nonlinear Dynamics*, 67(2) :1635 – 1646, January 2012.
- [123] N. Wiener. Cybernetics of nervous system. *American Mathematical Society*, 1965.
- [124] A.T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.*, 16(1) :15–42, 1967.
- [125] C.W. Wu. On a matrix inequality and its application to the synchronization in coupled chaotic systems. complex computing-networks : Brain-like and wave-oriented electrodynamics. *Spinger Proceedings in Physics*, 104 :279–288, 2006.
- [126] T. Yoshizawa. Stability theory by Lyapunov’s second method. *The Mathematical Society of Japan*, 1966.
- [127] H. Yu and J. Peng. Chaotic synchronization and control in nonlinear-coupled Hindmarsh-Rose neural systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 29 :342–348, 2006.
- [128] W. Zhang, M. S. Branicky, and S. M. Phillips. Stability of networked control systems. *Control Systems IEEE*, 21(1) :84 – 99, Feb. 2001.